Uniwersytet Mikołaja Kopernika
w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Piotr Stefaniak

Silnie nieokreślone układy równań eliptycznych i ich rozwiązania

Rozprawa doktorska napisana
w Zakładzie Równań Różniczkowych
Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu
pod kierunkiem
prof. dra hab. Sławomira Rybickiego

Toruń 2015

Dziękuję Panu Profesorowi
Sławomirowi Rybickiemu
za poświęcony czas
i cenne uwagi

Spis treści

Wstęp **3**

1 Wiadomości wstępne **10**
- 1.1 Podstawowe definicje, oznaczenia, fakty 10
- 1.2 Grupy Liego i ich reprezentacje 13
- 1.3 Pierścień Eulera 18
- 1.4 Stopień funkcjonałów niezmienniczych 22
  - 1.4.1 Stopień współzmienniczych odwzorowań gradientowych 22
  - 1.4.2 Stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych 26
- 1.5 Spektrum operatora Laplace'a 28
  - 1.5.1 Spektrum operatora Laplace'a na zbiorze otwartym 28
  - 1.5.2 Spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na sferze 30
  - 1.5.3 Spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na kuli geodezyjnej 32

2 Łamanie symetrii w niekooperatywnym układzie równań eliptycznych **35**
- 2.1 Abstrakcyjne sformułowanie problemu 36
- 2.2 Zagadnienie łamania symetrii w równaniu eliptycznym 38
- 2.3 Układ równań eliptycznych 43
- 2.4 Zagadnienie łamania symetrii w układzie równań eliptycznych 51
- 2.5 Przykłady 54

3 Nieograniczone zbiory rozwiązań w niekooperatywnym układzie równań eliptycznych na sferze **57**
- 3.1 Układ równań eliptycznych na sferze 57
- 3.2 Nieograniczone zbiory rozwiązań oraz zagadnienie łamania symetrii 65

4 Zbiory rozwiązań niekooperatywnych układów równań eliptycznych na kuli geodezyjnej **73**
- 4.1 Układ równań z warunkiem brzegowym Dirichleta 74
  - 4.1.1 Preliminaria 74
  - 4.1.2 Zbiory rozwiązań oraz łamanie symetrii 78
- 4.2 Układ równań z warunkiem brzegowym Neumanna 83
  - 4.2.1 Preliminaria 83
  - 4.2.2 Zbiory rozwiązań oraz łamanie symetrii 87

Bibliografia **91**

Indeks **95**

Wstęp

W niniejszej rozprawie rozważamy następujące zagadnienia:

(1) łamanie symetrii słabych rozwiązań w niekooperatywnym układzie równań eliptycznych z warunkiem brzegowym Neumanna,

(2) istnienie nieograniczonych zbiorów słabych rozwiązań w niekooperatywnym układzie równań eliptycznych na sferze oraz zagadnienie łamania symetrii w tym układzie,

(3) istnienie nieograniczonych zbiorów słabych rozwiązań oraz zagadnienie łamania symetrii w niekooperatywnych układach równań eliptycznych na kuli geodezyjnej.

W pierwszej części rozprawy rozważamy zagadnienie łamania symetrii dla następującego układu równań

$$\begin{cases} -\Delta w_1 &= \nabla_{w_1} F(w_1, w_2) + f_1 \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \Delta w_2 &= \nabla_{w_2} F(w_1, w_2) + f_2 \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} &= \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 \qquad\qquad\quad \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\mathbb{R}^n$ jest ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwartym, ograniczonym i G-niezmienniczym podzbiorem z gładkim brzegiem oraz $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. To znaczy rozważamy problem istnienia G-symetrycznej funkcji (f_1, f_2) takiej, że istnieje H-symetryczne rozwiązanie (w_1, w_2) układu (1), przy czym H jest domkniętą podgrupą grupy G. Jeżeli takie rozwiązanie istnieje, to mówimy, że zachodzi łamanie symetrii słabych rozwiązań problemu (1). Innymi słowy, problem jest następujący: czy istnieje $(w_1, w_2) \in \mathbb{V}^H \setminus \mathbb{V}^G$ takie, że $\nabla\Phi(w_1, w_2) \in \mathbb{V}^G$? Przy czym $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem związanym z układem (1), $\mathbb{V} = H^1(\Omega) \oplus H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ jest przestrzenią Sobolewa, $\mathbb{V}^H$, $\mathbb{V}^G$ oznaczają odpowiednio zbiór punktów stałych działania grupy H oraz G na przestrzeni $\mathbb{V}$.

Zagadnienie łamania symetrii było badane przez wielu autorów, przy różnych założeniach na funkcję F i zbiór Ω. Na przykład, w pracy [13] Dancer badał nieradialne rozwiązania równania $-\Delta u = f(u, \lambda)$ na jednostkowej kuli otwartej $B^n \subset \mathbb{R}^n$ z warunkiem brzegowym Dirichleta, które lokalnie bifurkują z rozwiązań radialnych tego równania. W artykule [14] ten sam autor badał równanie $-\Delta u = f(u) + h$ na kuli B^n z warunkiem brzegowym Dirichleta oraz uzyskał warunki na funkcję f, które pozwalały na rozstrzygnięcie czy istnieje radialnie symetryczna funkcja h taka, że to równanie posiada nieradialnie symetryczne rozwiązanie. W pracy [9] Cerami badała zagadnienie $-\Delta u = f(u)$ na kuli otwartej $B_R(\mathbb{R}^n)$ o promieniu R z warunkiem brzegowym Dirichleta oraz bifurkacje nieradialnych rozwiązań z rodziny rozwiązań trywialnych, w której jako parametr traktuje się promień kuli. Podobnym problemem, ale z inną rodziną rozwiązań trywialnych, zajmowali się Smoller i Wasserman w pracach [56], [57]. W artykule [47] autorzy pokazali, że dla problemu $-\Delta u = u^p - \lambda$ na kuli jednostkowej B^n, $\lambda > 0$, istnieje dodatnie rozwiązanie (u_0, λ_0), które jest jednocześnie punktem łamania symetrii rozwiązań radialnych. W pracy [10] autorzy badali zagadnienie łamania symetrii dla układu równań eliptycznych

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f(u_1, u_2) & \text{w } B_R(\mathbb{R}^n), \\ \Delta u_2 = g(u_1, u_2) & \text{w } B_R(\mathbb{R}^n), \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial B_R(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

W publikacji [60] Srikanth badał zagadnienie łamania symetrii rozwiązań równania $-\Delta u = u^p + \lambda u$ na pierścieniu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i udowodnił, że na gałęzi rozwiązań radialnych (u_λ, λ) zachodzi łamanie symetrii w pewnym punkcie $(u_{\lambda_0}, \lambda_0)$ takim, że $0 < \lambda_0 < \lambda_1$, o ile pierścień Ω ma odpowiednio małą grubość, przy czym λ_1 oznacza pierwszą wartość własną operatora $-\Delta$ na Ω. W artykule [58] autorzy badali bifurkacje nieradialnie symetrycznych rozwiązań równania $\Delta u + f(u, \lambda) = 0$ na B^n z warunkiem brzegowym $\alpha u - \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Przy pewnych założeniach udowodnili istnienie infinitezymalnego łamania symetrii, to znaczy pokazali, że istnieje rozwiązanie u takie, że zlinearyzowane równanie posiada rozwiązanie nieradialne. W pracy [59] ci sami autorzy zastosowali do tego zagadnienia redukcję Lapunowa–Schmidta oraz badali zagadnienie łamania symetrii rozwiązań dla dowolnej zwartej grupy Liego G. Korzystając z niezmienniczego indeksu Conleya, sformułowali warunki wystarczające istnienia ciągu rozwiązań problemu łamania symetrii.

W drugim rozdziale badamy problem podobny do powyższych w przypadku niekooperatywnego układu równań eliptycznych (1). Zauważmy, że funkcjonał stowarzyszony z tym układem jest silnie nieokreślony, zatem do badania jego rozwiązań nie można użyć narzędzi z powyższych prac. Ideą dowodu głównych wyników tej części rozprawy jest sprowadzenie zagadnienia (1) do problemu bifurkacyjnego, podobnie jak to zostało zrobione w artykule [14]. W tej pracy do zagadnienia bifurkacyjnego został zastosowany homotopijny indeks Rybakowskiego, vide [49]. Korzystając z tego indeksu, sformułowane zostały warunki na istnienie punktu lokalnej bifurkacji, czyli ciągu rozwiązań problemu bifurkacyjnego, a zatem również zagadnienia łamania symetrii. Korzystając z tych wyników, sformułowane zostały warunki implikujące zachodzenie łamania symetrii w równaniu eliptycznym. Warunki te zostały zapisane w języku prawej strony równania oraz wartości własnych operatora Laplace'a.

W rozprawie do zagadnienia (1) stosujemy stopień G-niezmienniczych, silnie nieokreślonych funkcjonałów, zdefiniowany w pracy [23]. Korzystając z tego stopnia, formułujemy warunki konieczne na istnienie rozwiązań głównego problemu tego rozdziału w języku prawej strony układu równań (1) oraz wartości własnych operatora Laplace'a. Co więcej, warunki te implikują istnienie globalnej bifurkacji, czyli spójnego zbioru rozwiązań. Z tego powodu, oraz dlatego, że rozważany układ równań jest niekooperatywny, otrzymane wyniki uogólniają rezultaty z pracy Dancera [14]. Ponadto stosując ten stopień do równania badanego w tej pracy, uzyskujemy globalną bifurkację rozwiązań problemu łamania symetrii, w odróżnieniu od lokalnej bifurkacji otrzymanej przez Dancera.

Do badania zagadnienia łamania symetrii słabych rozwiązań niekooperatywnych układów równań eliptycznych może zostać również użyty homotopijny i G-homotopijny indeks dla silnie nieokreślonych funkcjonałów, vide [32], [33]. Stosując te narzędzia, można jednak otrzymać jedynie ciąg rozwiązań. Aby uzyskać globalne bifurkacje rozwiązań przy użyciu G-homotopijnego indeksu, można wykorzystać zależności pomiędzy tym indeksem oraz stopniem gradientowych odwzorowań G-współzmienniczych, vide [22], [36].

Opisana powyżej część rozprawy została opublikowana w artykule [61].

W trzeciej części rozprawy rozważamy układ równań

$$\begin{cases} a_1\Delta_{S^{n-1}}u_1 &= \nabla_{u_1}F(u,\mu), \\ a_2\Delta_{S^{n-1}}u_2 &= \nabla_{u_2}F(u,\mu), \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad \text{na } S^{n-1}, \\ a_p\Delta_{S^{n-1}}u_p &= \nabla_{u_p}F(u,\mu), \end{cases} \tag{2}$$

przy czym $\Delta_{S^{n-1}}$ jest operatorem Laplace'a–Beltramiego na sferze S^{n-1}, $a_i \in \{-1,1\}$, $F \in C^2(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ jest takie, że $\nabla_u F(u,\mu) = \mu u + \nabla_u g(u,\mu)$, gdzie $g \in C^2(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ i dla każdego $\mu\in\mathbb{R}$ zachodzi $\nabla_u g(0,\mu) = 0$ oraz $\nabla_u^2 g(0,\mu) = 0$.

Klasyczna alternatywa Rabinowitza opisuje zachowanie kontinuum nietrywialnych rozwiązań nieliniowego problemu własnego, które bifurkuje ze zbioru rozwiązań trywialnych. Alternatywa stwierdza, że dla dużej klasy takich problemów, kontinuum bifurkuje z wartości charakterystycznej nieparzystej krotności algebraicznej oraz jest ono nieograniczone albo przecina zbiór rozwiązań trywialnych w innym punkcie, vide [43], [45], [46]. Alternatywę tę można zastosować do układu (2) ze współczynnikami a_i tego samego znaku. Aby to zrobić, z układem (2) stowarzyszamy funkcjonał $\Phi\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, którego gradient $\nabla_u\Phi$ jest zwartym zaburzeniem identyczności, natomiast punkty krytyczne tego funkcjonału odpowiadają słabym rozwiązaniom tego systemu, przy czym $\mathbb{V}$ jest odpowiednią przestrzenią Hilberta z symetriami grupy SO(2). Ponieważ zbiór S^{n-1} można rozważać jako SO(2)-niezmienniczy podzbiór ortogonalnej SO(2)-reprezentacji $\mathbb{R}^n$, funkcjonał Φ jest SO(2)-niezmienniczy, zaś jego gradient $\nabla_u\Phi$ jest SO(2)-współzmienniczy. Wiadomo jednak, że stopień Leray–Schaudera, który jest używany w klasycznej alternatywie Rabinowitza, nie jest odpowiednim narzędziem do badania operatorów z symetriami. Wynika to z następującego twierdzenia Rabiera i Wanga, vide [44], [64]:

Twierdzenie 1. *Niech G będzie zwartą grupą Liego, $\mathbb{V}$ przestrzenią Hilberta będącą jednocześnie ortogonalną G-reprezentacją oraz niech $\mathcal{U}\subset\mathbb{V}$ będzie otwartym i ograniczonym zbiorem G-niezmienniczym. Oznaczmy przez G^0 składową spójności elementu neutralnego w G, niech $T\subset G^0$ będzie torusem maksymalnym oraz niech $N(T)$ będzie jego normalizatorem w G. Przypuśćmy, że $\mathbb{V}^{N(T)} = \mathbb{V}^G$ i niech $f\in C(\mathbb{V},\mathbb{V})$ będzie G-współzmienniczym zwartym zaburzeniem identyczności takim, że $0\notin f(\partial\mathcal{U})$. Wówczas*

$$\deg_{LS}(f,\mathcal{U},0) = \deg_{LS}\left(f_{|\mathcal{U}^G},\mathcal{U}^G,0\right) \mod \mathcal{I}^{N(T)/T},$$

przy czym $\deg_{LS}$ oznacza stopień Leray–Schaudera, $\mathcal{U}^G = \mathcal{U}\cap\mathbb{V}^G$, $\mathbb{V}^G$ zbiór punktów stałych działania grupy G na $\mathbb{V}$, $\mathcal{I}^{N(T)/T}$ ideał w $\mathbb{Z}$ generowany przez $[N(T)/T\colon\Gamma_x]$, $x\in\mathbb{V}^T\setminus\mathbb{V}^G$ oraz Γ_x jest grupą izotropii elementu x ze względu na działanie $N(T)/T$ na $\mathbb{V}^T$.

Załóżmy, że $G = SO(2)$. Wówczas $\mathcal{I}^{N(T)/T} = \{0\}$, zatem z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek 2. *Załóżmy, że $\mathbb{V}$ jest SO(2)-reprezentacją, $\mathcal{U}\subset\mathbb{V}$ otwartym, ograniczonym, SO(2)-niezmienniczym zbiorem i $f\in C(\mathbb{V},\mathbb{V})$ jest SO(2)-współzmienniczym, zwartym zaburzeniem identyczności takim, że $0\notin f(\partial\mathcal{U})$. Wówczas $\deg_{LS}(f,\mathcal{U},0) = \deg_{LS}(f_{|\mathcal{U}^{SO(2)}},\mathcal{U}^{SO(2)},0)$.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeżeli $\mathcal{U}^{\mathrm{SO}(2)} = \emptyset$ lub $\mathcal{U}^{\mathrm{SO}(2)} \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, to zachodzi równość $\deg_{LS}(f, \mathcal{U}, 0) = 0$.

Do badania układu (2) ze współczynnikami a_i tych samych znaków można zastosować stopień SO(2)-współzmienniczych odwzorowań ortogonalnych, vide [50]. Używając tego stopnia, można sformułować i udowodnić współzmienniczą wersję alternatywy Rabinowitza. Następne twierdzenie wynika z zastosowania tej alternatywy do zagadnienia (2), w pracy [50] można znaleźć pełną wersję tego twierdzenia.

Twierdzenie 3. *Ustalmy μ_{m_0} wartość własną operatora $-\Delta_{S^{n-1}}$ i oznaczmy przez $V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu_{m_0})$ podprzestrzeń własną stowarzyszoną z μ_{m_0}. Jeżeli $p \cdot \dim V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu_{m_0})$ jest liczbą nieparzystą lub $V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu_{m_0})$ jest nietrywialną reprezentacją grupy* SO(2)*, to istnieje spójny zbiór słabych rozwiązań układu* (2)*, którego elementem jest $(0, \mu_{m_0})$ i jest nieograniczony w $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$ albo przecina zbiór rozwiązań trywialnych $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punkcie $(0, \mu_{m_1}) \neq (0, \mu_{m_0})$.*

W pracy [52] Rybicki pokazał, że druga możliwość w powyższym twierdzeniu, to znaczy ograniczoność zbioru słabych rozwiązań, nie może zachodzić dla równania $-\Delta_{S^{n-1}} u = f(u, \lambda)$. Używając tych samych narzędzi, można uogólnić ten rezultat dla układu (2) ze współczynnikami a_i tych samych znaków.

Przypuśćmy, że $K \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest liniowym, zwartym, ograniczonym, samosprzężonym operatorem SO(2)-współzmienniczym. Postępując tak jak w pracy [37], można wprowadzić pojęcie nieliniowej wartości własnej operatora K.

Definicja 1. Powiemy, że μ_{m_0} jest nieliniową wartością własną operatora K, jeśli $(0, \mu_{m_0}^{-1})$ jest punktem bifurkacji rozwiązań równania $(\mathrm{Id} - \mu K)u + \nabla_u \eta(u, \mu) = 0$ ze zbioru $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ dla dowolnego zwartego, SO(2)-niezmienniczego funkcjonału $\eta \colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającego $\nabla_u \eta(0, \mu) = 0$ i $\nabla_u^2 \eta(0, \mu) = 0$ dla każdych $\mu \in \mathbb{R}$.

Pomijając strukturę wariacyjną i symetrie grupy SO(2), można badać bifurkacje rozwiązań równania $(\mathrm{Id} - \mu K)u + \nabla_u \eta(u, \mu) = 0$, używając stopnia Leray–Schaudera. Zauważmy, że μ_{m_0} jest nieliniową wartością własną K wtedy i tylko wtedy, gdy μ_{m_0} jest wartością własną K nieparzystej krotności, vide [37]. Wyznaczając indeks bifurkacji wyrażony w języku stopnia SO(2)-współzmienniczych odwzorowań gradientowych, można uzasadnić następujące twierdzenie, vide [19]:

Twierdzenie 4. *Liczba $\mu_{m_0} > 0$ jest nieliniową wartością własną K wtedy i tylko wtedy, gdy μ_{m_0} jest wartością własną K nieparzystej krotności lub podprzestrzeń własna $V_K(\mu_{m_0})$ odpowiadająca wartości własnej μ_{m_0} jest nietrywialną* SO(2)*-reprezentacją.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeżeli μ_{m_0} jest wartością własną K parzystej krotności, zaś przestrzeń $V_K(\mu_{m_0})$ jest nietrywialną SO(2)-reprezentacją, to μ_{m_0} nie jest nieliniową wartością własną w sensie [37], natomiast jest w sensie definicji 1.

Załóżmy teraz, że współczynniki a_i w układzie (2) są różnych znaków.

Inna wersja współzmienniczej alternatywy Rabinowitza została sformułowana przy użyciu stopnia silnie nieokreślonych funkcjonałów SO(2)-niezmienniczych, vide [23]. W trzecim rozdziale stosujemy tę alternatywę do układu (2). Zauważmy, że w przypadku, gdy współczynniki a_i są różnych znaków, nie można zastosować stopnia SO(2)-współzmienniczych odwzorowań gradientowych, ponieważ funkcjonał odpowiadający układowi (2) nie jest postaci zwarte zaburzenie identyczności. Niemniej jednak, do badania tego układu można zastosować stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów SO(2)-niezmienniczych.

Problem nieograniczoności zbiorów rozwiązań równań i układów równań różniczkowych był badany przez wielu autorów. Dla przykładu, udowodniono, że zbiór rozwiązań nieliniowego problemu Sturma–Liouville'a jest zawsze nieograniczony, vide [12], [45], [46]. Co więcej, Rabinowitz pokazał, że zbiory rozwiązań w równaniu eliptycznym

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a^{ij}\cdot u_{x_ix_j})+q \;=\; f(\mu,x,u) & \text{w} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u \;=\; 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

nie mogą być ograniczone, przy czym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem ograniczonym oraz rozważamy kontinua dodatnich rozwiązań bifurkujących z pierwszej wartości własnej operatora różniczkowego, vide [46]. Inny rezultat tego typu został opisany w pracy [11], gdzie badano kiedy druga możliwość w alternatywie Rabinowitza może być wykluczona dla kontinuów bifurkujących z następnych wartości własnych problemu (3). W pracach [27]-[29] Healey i Kielhöfer dowodzili nieograniczoności kontinuów nietrywialnych rozwiązań z symetriami w różnych typach równań różniczkowych. Kluczenko podała warunki wystarczające na istnienie nieograniczonych zbiorów rozwiązań nietrywialnych bifurkujących z rodziny rozwiązań trywialnych układu

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; \mu A u + \nabla_u \eta(u,\mu) & \text{w} \quad \Omega, \\ \quad u \;=\; 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

vide [35]. Miyamoto rozważał następujący problem:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu f(u) \;=\; 0 & \text{w} \quad B_R(\mathbb{R}^n), \\ \qquad\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \;=\; 0 & \text{na } \partial B_R(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

vide [42]. W tej pracy zostało pokazane istnienie nieograniczonego kontinuum nieradialnych rozwiązań bifurkujących z pierwszej dodatniej wartości własnej odpowiadającego problemu liniowego. Struktura rozwiązań zmieniających znak nieliniowego równania eliptycznego

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu f(u) \;=\; 0 & \text{w} \quad B_1(\mathbb{R}^2), \\ \qquad\quad u \;=\; 0 & \text{na } \partial B_1(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

była rozważana w pracy [41] przez tego samego autora. Głównym rezultatem tego artykułu jest istnienie nieskończenie wielu punktów bifurkacji, z których emanują nieograniczone rozwiązania nodalne, przy czym funkcje własne odpowiadające każdemu punktowi bifurkacji są nieradialnie symetryczne.

W trzecim rozdziale dowodzimy rezultat tego typu dla niekooperatywnych układów eliptycznych rozważanych na sferze, to znaczy badamy spójne zbiory słabych rozwiązań układu (2). Aby to zrobić, korzystamy ze stopnia SO(2)-niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych oraz wykorzystujemy strukturę przestrzeni własnych operatora Laplace'a–Beltramiego jako SO(2)-reprezentacji. Ponadto charakteryzujemy punkty globalnej bifurkacji, w których zachodzi zjawisko łamania symetrii. Pokazane wyniki zostały zawarte w pracy [53] oraz uogólniają rezultat z pracy [52].

W czwartej części rozprawy badamy problem nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań zagadnienia

$$\begin{cases} a_1\Delta_{S^n}u_1 &= \nabla_{u_1}F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ a_2\Delta_{S^n}u_2 &= \nabla_{u_2}F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ &\vdots \\ a_p\Delta_{S^n}u_p &= \nabla_{u_p}F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha) \end{cases} \tag{4}$$

z warunkami brzegowymi Dirichleta $u_1 = \ldots = u_p = 0$ na $\partial B(\alpha)$ i Neumanna $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \ldots = \frac{\partial u_p}{\partial \nu} = 0$ na $\partial B(\alpha)$, przy czym $B(\alpha) \subset S^n$ jest kulą geodezyjną o środku w punkcie $(0,\ldots,0,1) \in S^n$ i promieniu $\alpha \in (0,\pi)$, $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\nabla_u F(u,\mu) = \mu u + \nabla_u g(u,\mu)$, gdzie $g \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ i dla każdego $\mu \in \mathbb{R}$ zachodzi $\nabla_u g(0,\mu) = 0$ oraz $\nabla_u^2 g(0,\mu) = 0$, $a_i \in \{-1,1\}$.

Okazuje się, że jeżeli $\alpha = \frac{\pi}{2}$, to dla układu równań (4) nie jest możliwe, aby zbiór słabych rozwiązań był ograniczony. Podobnie jak w poprzedniej części rozprawy, charakteryzujemy punkty globalnej bifurkacji, w których zachodzi zjawisko łamania symetrii. Do uzyskania powyższych rezultatów został ponownie wykorzystany stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych oraz struktura podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a–Beltramiego na kuli geodezyjnej jako reprezentacji grup $\mathrm{SO}(n)$ i $\mathrm{SO}(2)$. W przypadku, gdy $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ jest dowolne, charakteryzujemy zbiory słabych rozwiązań bifurkujące z rodziny rozwiązań trywialnych. Zauważmy, że dowolna kula geodezyjna jest w sensie topologicznym podobna do kuli $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, dlatego można oczekiwać, że twierdzenia o nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań i łamania symetrii powinny się przenieść na ten przypadek. Ponieważ jednak nie jest znana struktura podprzestrzeni własnych jako reprezentacji grup $\mathrm{SO}(n)$ i $\mathrm{SO}(2)$, metody wykorzystane w dowodzie wcześniejszych twierdzeń nie działają w ogólnym przypadku, zaś sam problem pozostaje otwarty. Wyniki uzyskane w tym rozdziale zostały zawarte w pracy [54].

Reasumując, w rozprawie rozważamy problem łamania symetrii i nieograniczoności spójnych zbiorów słabych rozwiązań niekooperatywnych układów równań eliptycznych. Tego typu problemy nie były do tej pory rozważane dla tej klasy układów. Ze względu na strukturę wariacyjną i niezmienniczą w tych zagadnieniach, do ich badania używamy stopnia silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych. W rozdziałach trzecim i czwartym do badania eliptycznych układów równań na sferze i kuli geodezyjnej stosujemy niezmienniczą wersję alternatywy Rabinowitza. Pokazujemy, że główne wyniki w tych częściach rozprawy, dotyczące nieograniczoności zbiorów słabych rozwiązań, wykluczają jedną z możliwości w tej alternatywie. Pomijając działanie grupy, można stosować inne niezmienniki, odpowiednie dla problemów silnie nieokreślonych. Warto jednak podkreślić, że uzyskane wyniki byłyby wówczas słabsze, na przykład stosując stopień Leraya–Schaudera i klasyczną alternatywę Rabinowitza, nie można udowodnić nieograniczoności zbiorów słabych rozwiązań równania eliptycznego na sferze i kuli geodezyjnej.

Po tym wstępie, rozprawa jest zorganizowana w następujący sposób:

- W rozdziale pierwszym wprowadzamy pojęcia potrzebne w dalszej części rozprawy, w szczególności te związane ze zwartymi grupami Liego i ich reprezentacjami, pierścieniem Eulera zwartej grupy Liego i stopniem silnie nieokreślonych niezmienniczych funkcjonałów. Wprowadzamy także strukturę reprezentacji na przestrzeniach Sobolewa oraz podajemy własności wartości i przestrzeni własnych operatora eliptycznego.

- W rozdziale drugim badamy zagadnienie łamania symetrii rozwiązań w równaniu eliptycznym i układzie (1).

- W rozdziale trzecim opisujemy zagadnienia nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań oraz łamania symetrii w układzie (2).
- W rozdziale czwartym badamy strukturę zbioru rozwiązań oraz zagadnienie łamania symetrii w układzie (4).

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

W tym rozdziale wprowadzimy podstawowe pojęcia używane w dalszej części rozprawy, w szczególności te związane ze zwartymi grupami Liego i ich reprezentacjami, pierścieniem Eulera zwartej grupy Liego i stopniem silnie nieokreślonych niezmienniczych funkcjonałów. Wprowadzimy także strukturę reprezentacji na przestrzeniach Sobolewa oraz podamy własności wartości i przestrzeni własnych operatora eliptycznego.

1.1 Podstawowe definicje, oznaczenia, fakty

W tym podrozdziale podamy podstawowe definicje i oznaczenia używane w rozprawie. Przedstawiony tutaj materiał pochodzi z następujących pozycji literatury: [18], [24], [25], [30], [40], [55].

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Dla dowolnego zbioru $\Omega \subset X$ przez $\overline{\Omega}$ lub $\operatorname{cl}\Omega$ oznaczamy domknięcie, zaś przez $\partial\Omega$ brzeg zbioru Ω. Dla przestrzeni topologicznych X, Y przez $C(X, Y)$ oznaczamy zbiór funkcji ciągłych $f\colon X \to Y$, zaś przez $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ oznaczamy odwzorowanie identycznościowe. Jeżeli z kontekstu będzie jasno wynikało jaka jest przestrzeń X, to odwzorowanie identycznościowe będziemy oznaczać Id.

Ustalmy $k, m, n \in \mathbb{N}$ i niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym podzbiorem. Symbolem $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ będziemy oznaczać przestrzeń funkcji k-krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na Ω. Połóżmy $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Funkcje należące do zbioru $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ nazywamy funkcjami gładkimi. Dla skrócenia zapisu będziemy oznaczać $C^k(\Omega)$ zamiast $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ oraz $C(\Omega)$ zamiast $C(\Omega, \mathbb{R})$.

Dla $\phi \in C^1(\Omega)$ kładziemy

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)^T \in C(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Odwzorowanie $\nabla\phi$ nazywamy gradientem funkcji ϕ. Jeżeli $\phi \in C^2(\Omega)$, to oznaczamy

$$\nabla^2\phi(x) = \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1,\ldots,n}, \quad \Delta\phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}(x).$$

Macierz $\nabla^2\phi(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy macierzą Hessa drugich pochodnych funkcji ϕ w punkcie

$x \in \Omega$, natomiast $\Delta\colon C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ nazywamy operatorem Laplace'a. Jeśli odwzorowanie $\phi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ jest postaci $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$, to kładziemy $\nabla\phi = (\nabla\phi_1, \ldots, \nabla\phi_m)$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Powiemy, że brzeg $\partial\Omega$ jest klasy C^k, jeśli każdy punkt $x \in \Omega$ posiada otwarte otoczenie $x \in B_x \subset \mathbb{R}^n$, w którym zbiór $\partial\Omega \cap B_x$ jest wykresem funkcji klasy C^k. Brzeg $\partial\Omega$ jest klasy C^∞ (gładki), o ile jest klasy C^k dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $\partial\Omega$ jest klasy C^1, to dla każdego $x_0 \in \partial\Omega$ istnieje zewnętrzny wektor normalny do brzegu $\nu(x_0)$, przez $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x_0)$ oznaczamy pochodną funkcji $\phi \in C^1(\Omega)$ w kierunku wektora $\nu(x_0)$ w punkcie x_0.

Niech $\mathbb{V}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}}$ i normą $||\cdot||_{\mathbb{V}}$. W skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej normę i iloczyn skalarny będziemy oznaczać przez $||\cdot||$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle$, odpowiednio. Niech $\mathbb{V}_1$ będzie również rzeczywistą przestrzenią Hilberta, a $\Omega \subset \mathbb{V}$ otwartym podzbiorem. Przez $C^k(\Omega, \mathbb{V}_1)$ oznaczamy zbiór operatorów $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{V}_1$, k-krotnie różniczkowalnych w sensie Frécheta w sposób ciągły. Dla uproszczenia będziemy pisać $C^k(\Omega)$ zamiast $C^k(\Omega, \mathbb{R})$. Dla ustalonego punktu $u_0 \in \mathbb{V}$ będziemy oznaczać

$$\begin{aligned} B_\gamma(\mathbb{V}, u_0) &= \{u \in \mathbb{V}\colon ||u - u_0||_{\mathbb{V}} < \gamma\}, \\ D_\gamma(\mathbb{V}, u_0) &= \{u \in \mathbb{V}\colon ||u - u_0||_{\mathbb{V}} \leqslant \gamma\}, \\ S_\gamma(\mathbb{V}, u_0) &= \{u \in \mathbb{V}\colon ||u - u_0||_{\mathbb{V}} = \gamma\} \end{aligned}$$

odpowiednio kulę otwartą, domkniętą i sferę w $\mathbb{V}$ o środku w punkcie u_0 i promieniu γ. Będziemy również używać oznaczeń $B_\gamma(\mathbb{V})$, $D_\gamma(\mathbb{V})$, $S_\gamma(\mathbb{V})$ odpowiednio dla kuli otwartej, domkniętej i sfery o środku w punkcie $0 \in \mathbb{V}$ oraz $B(\mathbb{V})$, $D(\mathbb{V})$, $S(\mathbb{V})$ w przypadku, gdy ich promień wynosi 1. Jeżeli $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{n+1}$, to będziemy również stosować oznaczenia: $B^{n+1} = B(\mathbb{R}^{n+1})$, $S^n = S(\mathbb{R}^{n+1})$. Na sferze S^n określamy metrykę $d(p,q) = \inf\limits_{\omega} \int_a^b |\omega'(t)|dt$, gdzie $p, q \in S^n$ oraz $\omega\colon [a,b] \to S^n$ są funkcjami ciągłymi, kawałkami klasy C^1 takimi, że $\omega(a) = p$, $\omega(b) = q$. Kulę geodezyjną na S^n o środku w punkcie $x \in S^n$ i promieniu $\alpha \in (0,\pi)$ określamy wzorem $B(x,\alpha) = \{q \in S^n\colon d(x,q) < \alpha\}$. Jeżeli $x = (0,\ldots,0,1) \in S^n$, to będziemy stosować oznaczenie $B(\alpha) = B(x,\alpha)$.

Jeżeli $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Hilberta oraz $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ jej podprzestrzeniami liniowymi, to kładziemy

$$\mathbb{V}_1 \ominus \mathbb{V}_2 = \{u \in \mathbb{V}_1 \colon \forall_{v \in \mathbb{V}_2}\ \langle u, v\rangle_{\mathbb{V}} = 0\}.$$

Poniższe twierdzenie wynika z własności funkcjonałów zadanych na przestrzeniach Hilberta.

Twierdzenie 1.1.1. *Niech $\mathbb{V}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta, zaś $\Omega \subset \mathbb{V}$ otwartym podzbiorem. Wówczas dla każdego funkcjonału $\Phi \in C^1(\Omega)$ istnieje dokładnie jeden ciągły operator $\nabla\Phi\colon \Omega \to \mathbb{V}$ taki, że $\langle\nabla\Phi(u), v\rangle_{\mathbb{V}} = D\Phi(u)(v)$ dla dowolnych $u \in \Omega$, $v \in \mathbb{V}$.*

Operator $\nabla\Phi$ zdefiniowany w powyższym twierdzeniu będziemy nazywać gradientem funkcjonału Φ.

W drugim rozdziale będziemy potrzebować następującego, technicznego lematu:

Lemat 1.1.2. *Niech $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ będą przestrzeniami Hilberta, ustalmy $\Phi \in C^1(\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2, \mathbb{R})$ oraz niech $i\colon \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$, $\pi\colon \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_2$ będą odwzorowaniami danymi wzorami: $i(v) = (0,v), \pi(u,v) = v$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\psi\colon \mathbb{V}_2 \to \mathbb{R}$ jako złożenie $\psi(v) = \Phi(i(v))$. Wówczas $\nabla\psi = \pi \circ \nabla\Phi \circ i$.*

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Hilberta, Λ przestrzenią liniową (przestrzenią parametrów) oraz funkcjonał $\Phi \in C^1(\mathbb{V} \times \Lambda)$ niech będzie taki, że $\nabla_u\Phi(0,\lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$, przy czym zapis $\nabla_u\Phi$ oznacza gradient Φ ze względu na zmienną u. Rozważmy równanie

$$\nabla_u\Phi(u,\lambda) = 0. \tag{1.1}$$

Oznaczmy przez $\mathcal{N}$ zbiór nietrywialnych rozwiązań równania (1.1), to znaczy

$$\mathcal{N} = \{(u, \lambda) \in (\mathbb{V} \setminus \{0\}) \times \Lambda \colon \nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0\}.$$

Ustalmy $\lambda_0 \in \Lambda$ i oznaczmy przez $C(\lambda_0)$ składową spójności zbioru $\overline{\mathcal{N}}$ taką, że $(0, \lambda_0) \in C(\lambda_0)$.

Definicja 1.1.1. Punkt $(0, \lambda_0) \in \{0\} \times \Lambda$ nazywamy punktem bifurkacji lokalnej niezerowych rozwiązań równania (1.1), jeżeli $(0, \lambda_0) \in \overline{\mathcal{N}}$. Punkt $(0, \lambda_0) \in \{0\} \times \Lambda$ nazywamy punktem rozgałęzienia niezerowych rozwiązań równania (1.1), jeżeli $C(\lambda_0) \neq \{(0, \lambda_0)\}$. Punkt $(0, \lambda_0) \in \{0\} \times \Lambda$ nazywamy punktem bifurkacji globalnej niezerowych rozwiązań równania (1.1), jeżeli $C(\lambda_0) \cap (0 \times (\Lambda \setminus \{\lambda_0\}) \neq \emptyset$ albo $C(\lambda_0)$ jest nieograniczony.

Niech $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ będą przestrzeniami liniowymi oraz $L \colon \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ operatorem liniowym. Przez $\ker L$ będziemy oznaczać jądro operatora L, zaś przez $\operatorname{im} L$ jego obraz.

Definicja 1.1.2. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Hilberta. Operator $T \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ nazywamy zwartym, jeśli jest on ciągły i zbiór $\overline{T(A)}$ jest zwarty dla każdego ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{V}$. Operator $T \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest pełnociągły, jeżeli dla każdego ciągu $\{u_n\}$ zachodzi: jeżeli $u_n \rightharpoonup u_0$, to $T(u_n) \to T(u_0)$ przy czym $u_n \rightharpoonup u_0$ oznacza słabą zbieżność ciągu u_n do u_0.

Z refleksywności przestrzeni Hilberta wynika następujący fakt:

Fakt 1.1.3. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Hilberta. Jeżeli operator $T \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest pełnociągły, to jest zwarty.*

Jeżeli $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, to

$$\int\limits_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = \int\limits_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dx - \int\limits_{\Omega} \langle \nabla v(x), \nabla u(x) \rangle \, dx. \tag{1.2}$$

Powyższy wzór jest nazywany wzorem Greena.

Zdefiniujemy teraz operator Laplace'a–Beltramiego $\Delta_{S^{n-1}}$ na sferze jednostkowej S^{n-1}. Rozważmy następujący, biegunowy układ współrzędnych

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \theta_1, \\
x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= r \sin \theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}, \\
x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\
x_n &= r \sin \theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1},
\end{aligned}$$

gdzie $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant \pi$ (dla $1 \leqslant j \leqslant n-2$) oraz $0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant 2\pi$.

Niech $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zdefiniujmy operator $\Delta_{S^{n-1}}$ wzorem

$$\Delta_{S^{n-1}} u = \sum_{k=1}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{k} \sin \theta_j \right)^{-2} (\sin \theta_k)^{k+3-n} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\sin^{n-k-1} \theta_k \frac{\partial u}{\partial \theta_k} \right) + \left(\prod_{j=1}^{k} \sin \theta_j \right)^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_{n-1}^2}.$$

Operator $\Delta_{S^{n-1}}$ będziemy nazywać operatorem Laplace'a–Beltramiego na S^{n-1}. Związek operatorów $\Delta_{S^{n-1}}$ i Δ opisuje zależność

$$\Delta u = r^{1-n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}u,$$

vide [55].

1.2 Grupy Liego i ich reprezentacje

W tym podrozdziale opiszemy podstawowe pojęcia związane z grupami Liego i ich reprezentacjami. Materiał zawarty w tej części rozprawy pochodzi z książek [1], [7], [8], [13], [15], [16], [31] i [34].

Definicja 1.2.1. Grupę G, która jest równocześnie rozmaitością gładką, będziemy nazywać grupą Liego wtedy i tylko wtedy, gdy działanie $G \times G \ni (g,h) \mapsto gh^{-1} \in G$ jest klasy C^∞.

Od tej pory przez G będziemy oznaczać zwartą grupę Liego, to znaczy grupę Liego, która jest równocześnie zwartą przestrzenią topologiczną.

Przez $\overline{\mathrm{sub}}(G)$ będziemy oznaczać zbiór domkniętych podgrup grupy G. Dwie grupy $H, K \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$ nazywamy sprzężonymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in G$ takie, że $H = gKg^{-1}$. Tak zdefiniowana relacja jest relacją równoważności, przez (H) oznaczamy klasę abstrakcji podgrupy $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$ względem tej relacji, zaś przez $\overline{\mathrm{sub}}[G]$ oznaczamy zbiór wszystkich klas abstrakcji tej relacji. Przez $N(H)$ będziemy oznaczać normalizator podgrupy $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$, to znaczy $N(H) = \{g \in G \colon gH = Hg\}$.

Podamy teraz kilka przykładów grup Liego.

Przykład 1.2.1.

1. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas grupa izomorfizmów przestrzeni* $\mathbb{V}$, *oznaczana przez* $\mathrm{Gl}(\mathbb{V})$, *jest grupą Liego. Będziemy również stosować oznaczenie* $\mathrm{Gl}(n) = \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$. *Co więcej, każda domknięta podgrupa tej grupy jest grupą Liego, w szczególności:*

   (i) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Gl}(n) \colon A^tA = \mathrm{Id}\}$ - *grupa macierzy ortogonalnych, przy czym* A^t *oznacza transpozycję macierzy* A,

   (ii) $\mathrm{Sl}(n) = \{A \in \mathrm{Gl}(n) \colon \det A = 1\}$,

   (iii) $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{Sl}(n)$ - *specjalna grupa macierzy ortogonalnych.*

2. *Sfera* S^1 *jest grupą Liego izomorficzną z grupą* $SO(2)$. *Zauważmy, że*

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} : \phi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Definicja 1.2.2. G-przestrzenią nazywamy parę (X, φ) złożoną z przestrzeni topologicznej X oraz ciągłego działania $\varphi\colon G \times X \to X$ spełniającego warunki

(i) $\forall_{x \in X}\ \varphi(e, x) = x$, gdzie e jest elementem neutralnym grupy G,

(ii) $\forall_{g_1, g_2 \in G}\ \forall_{x \in X}\ \varphi(g_2, \varphi(g_1, x)) = \varphi(g_2 g_1, x)$.

Działanie grupy dane wzorem $\varphi(g, x) = x$ będziemy nazywać trywialnym. Jeżeli z kontekstu będzie jednoznacznie wynikało jak jest określone działanie φ, to będziemy w skrócie pisać gx zamiast $\varphi(g, x)$.

Jeżeli X jest gładką rozmaitością a φ odwzorowaniem gładkim, to X będziemy nazywać G-rozmaitością.

Definicja 1.2.3. Niech X będzie G-przestrzenią.

1. Zbiór $G(x) = \{gx\colon g \in G\}$ nazywamy orbitą punktu $x \in X$.
2. Zbiór $G_x = \{g \in G\colon gx = x\}$ nazywamy grupą izotropii (stabilizatorem) punktu $x \in X$.
3. Dla $H \subset G$, przez $X^H = \{x \in H\colon H \subset G_x\} = \{x \in X\colon \forall_{h \in H}\ hx = x\}$ oznaczamy zbiór punktów stałych działania grupy H.

Zauważmy, że jeżeli X jest G-przestrzenią, to dla dowolnego $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$ zachodzi $X^G \subset X^H$.

Definicja 1.2.4. Niech X będzie G-przestrzenią. Zbiór $Y \subset X$ nazywamy G-niezmienniczym, jeżeli $G(y) \subset Y$ dla każdego $y \in Y$.

Definicja 1.2.5. Niech X, Y będą G-przestrzeniami. Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywamy G-współzmienniczym (G-odwzorowaniem), jeżeli dla każdego $g \in G$ oraz $x \in X$ zachodzi: $f(gx) = gf(x)$. W przypadku, gdy $Y = \mathbb{R}$ jest G-przestrzenią z trywialnym działaniem grupy G, to mówimy, że odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}$, spełniające warunek $f(gx) = f(x)$, jest G-niezmiennicze.

Jeżeli G-odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest homeomorfizmem, to f nazywamy G-homeomorfizmem, zaś przestrzenie X i Y nazywamy G-homeomorficznymi.

W ogólności grupa G nie musi działać na zbiorze X^H, ponieważ zbiór X^H nie musi być G-niezmienniczy. Prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.2.1. *Zbiór X^H jest $N(H)$-niezmienniczy. W konsekwencji, jeżeli H jest podgrupą normalną w G, to znaczy $gH = Hg$ dla każdego $g \in G$, to zbiór X^H jest G-niezmienniczy.*

Opiszemy teraz podstawowe definicje i fakty związane z reprezentacjami zwartych grup Liego, ze szczególnym uwzględnieniem reprezentacji torusa.

Definicja 1.2.6. Niech $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}})$ będzie przestrzenią Hilberta. Mówimy, że $(\mathbb{V}, \rho)$ jest reprezentacją grupy Liego G (G-reprezentacją), gdy $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}(\mathbb{V})$ jest ciągłym homomorfizmem grup.

Jeżeli $(\mathbb{V}, \rho)$ jest G-reprezentacją, to grupa G działa na $\mathbb{V}$ poprzez przyporządkowanie $(g, v) \mapsto \rho(g)v$, gdzie $g \in G, v \in \mathbb{V}$. Jeżeli G działa w sposób trywialny, to reprezentację będziemy nazywać trywialną G-reprezentacją.

Iloczyn skalarny na G-reprezentacji $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}})$ nazywamy G-niezmienniczym, jeżeli dla każdych $v, w \in \mathbb{V}$, $g \in G$ zachodzi równość $\langle\rho(g)v, \rho(g)w\rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, w\rangle_{\mathbb{V}}$.

Mówimy, że G-reprezentacja $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}})$ jest ortogonalna, jeśli iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}}$ jest G-niezmienniczy.

W dalszym ciągu G-reprezentacją będziemy nazywać przestrzeń $\mathbb{V}$, o ile z kontekstu będzie w jednoznaczny sposób wynikało jak jest określone odwzorowanie ρ.

Lemat 1.2.2. *Niech $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ oraz $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$ będą reprezentacjami grupy Liego G. Wówczas suma prosta tych reprezentacji $(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$ również jest reprezentacją grupy G, przy czym homomorfizm $\rho_1 \oplus \rho_2 \colon G \to \mathrm{Gl}(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2)$ zadany jest wzorem*

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \begin{bmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{bmatrix}.$$

Ponadto jeśli reprezentacje $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ są ortogonalne, to $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ również jest reprezentacją ortogonalną.

Definicja 1.2.7. Mówimy, że G-reprezentacje $\mathbb{V}_1$ i $\mathbb{V}_2$ są G-równoważne, jeżeli istnieje G-współzmienniczy liniowy izomorfizm $T\colon \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$. Będziemy to oznaczać $\mathbb{V}_1 \approx_G \mathbb{V}_2$ lub $\mathbb{V}_1 \approx \mathbb{V}_2$, jeśli z kontekstu będzie w jednoznaczny sposób wynikało jaka jest grupa G.

Definicja 1.2.8. Niech $\mathbb{V}$ będzie G-reprezentacją. Podprzestrzeń liniową $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ nazywamy podreprezentacją reprezentacji $\mathbb{V}$, jeżeli $\mathbb{V}_1$ jest podprzestrzenią G-niezmienniczą.

Reprezentację $\mathbb{V}$ nazywamy nieprzywiedlną, jeżeli nie istnieją podreprezentacje reprezentacji $\mathbb{V}$ różne od $\mathbb{V}$ i $\{0\}$.

Przedstawimy teraz definicję torusa i jego podstawowe własności. Sformułujemy twierdzenie klasyfikujące reprezentacje tej grupy oraz wynikające z niego twierdzenie o jego domkniętych podgrupach.

Definicja 1.2.9. Grupę Liego T nazywamy n-wymiarowym torusem, jeżeli jest izomorficzna z $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Niech G będzie grupą spójną. Mówimy, że podgrupa $T \subset G$ jest torusem maksymalnym w G, jeżeli T jest torusem i nie istnieje torus T', dla którego $T \subsetneq T' \subset G$.

Przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$, n-wymiarowy torus będziemy oznaczać przez T^n oraz utożsamiać ze zbiorem:

$$\left\{\left(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_n}\right) \in S^1 \times \ldots \times S^1 \colon \phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathbb{R}\right\} = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ razy}}.$$

Jeżeli $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n$, to będziemy pisać $e^{i\phi} = (e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_n})$. Ponadto jeżeli $n = 1$, to torus T^1 jest sferą S^1.

Ustalmy $m \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ oraz zdefiniujmy odwzorowania $\rho_m \colon T^n \to \mathrm{SO}(2)$, $\rho_0 \colon T^n \to \mathbb{R}$ wzorami

$$\rho_m(e^{i\phi}) = \begin{bmatrix} \cos\langle m, \phi\rangle & -\sin\langle m, \phi\rangle \\ \sin\langle m, \phi\rangle & \cos\langle m, \phi\rangle \end{bmatrix}$$

oraz $\rho_0(e^{i\phi}) = 1$. Oznaczmy $\mathbb{R}[1,m] = (\mathbb{R}^2, \rho_m)$ dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{R}[1,0] = (\mathbb{R}, \rho_0)$. Zdefiniujmy

$$H_m = \left\{e^{i\phi} \in T^n \colon e^{i\langle m,\phi\rangle} = 1\right\} = \left\{e^{i\phi} \in T^n \colon \langle m, \phi\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\right\}.$$

Wówczas $H_m \in \overline{\mathrm{sub}}(T^n)$ oraz H_m jest rozmaitością wymiaru $n-1$. Ponadto jeżeli $n=1$, to $H_m = \mathbb{Z}_m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że reprezentacje $\mathbb{R}[1,m]$ i $\mathbb{R}[1,m']$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $m = \pm m'$ oraz jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}[1,m] \setminus \{0\}$, to $T^n_{x_0} = H_m$. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{Z}^n$. Zdefiniujmy

$$\mathbb{R}[k,m] = \underbrace{\mathbb{R}[1,m] \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[1,m]}_{k \text{ razy}}.$$

W poniższym twierdzeniu podajemy klasyfikację reprezentacji torusa.

Twierdzenie 1.2.3. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową T^n-reprezentacją. Wówczas istnieje liczba $r \in \mathbb{N}$ oraz skończone ciągi $\{k_i\}_{i=0}^r$, $\{m_i\}_{i=1}^r$ spełniające warunki:*

(i) $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^n$,

(ii) $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$,

(iii) $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

oraz takie, że reprezentacja $\mathbb{V}$ jest równoważna z reprezentacją

$$\mathbb{R}[k_0,0] \oplus \mathbb{R}[k_1,m_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[k_r,m_r] = \mathbb{R}[k_0,0] \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}[k_i,m_i].$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w książce [31].

Następne twierdzenie w połączeniu z poprzednim stanowi podstawę do badania pierścienia Eulera torusa $U(T^n)$.

Twierdzenie 1.2.4. *Niech G będzie zwartą grupą Liego oraz niech $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$. Wówczas istnieje skończenie wymiarowa G-reprezentacja $\mathbb{V}$ oraz $v \in \mathbb{V}$ takie, że $G_v = H$.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce [17].

Korzystając z dwóch powyższych twierdzeń, można uzasadnić następujące twierdzenie, klasyfikujące domknięte podgrupy torusa T^n.

Twierdzenie 1.2.5. *Niech $H \in \overline{\mathrm{sub}}(T^n)$. Wówczas $H = T^n$ albo istnieją $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ takie, że $H = H_{m_1} \cap \ldots \cap H_{m_k}$.*

Przez $C^k_G(\mathbb{V})$ będziemy oznaczać zbiór G-niezmienniczych funkcjonałów klasy C^k, zaś przez $C^{k-1}_G(\mathbb{V},\mathbb{V})$ zbiór G-współzmienniczych operatorów klasy C^{k-1}, $k \in \mathbb{N}$, przy czym przestrzeń $C^0_G(\mathbb{V},\mathbb{V})$ jest przestrzenią ciągłych operatorów G-współzmienniczych. Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 1.2.6. *Jeżeli $\varphi \in C^k_G(\mathbb{V})$, to $\nabla\varphi \in C^{k-1}(\mathbb{V},\mathbb{V})$, $k \in \mathbb{N}$.*

Wprowadzimy teraz strukturę reprezentacji na przestrzeniach Sobolewa. Definicje i własności tych przestrzeni można znaleźć na przykład w książkach [18], [30]. Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwartym, ograniczonym i G-niezmienniczym zbiorem. Przez $H^1(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń Sobolewa na zbiorze Ω z iloczynem skalarnym

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle + u(x) \cdot v(x) dx.$$

Przestrzeń $H^1(\Omega)$ jest ortogonalną G-reprezentacją z działaniem $G \times H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ zadanym wzorem $(g, u)(x) \mapsto u(g^{-1}x)$. Jeżeli grupa G jest przemienna, to działanie zadajemy wzorem $(g, u)(x) \mapsto u(gx)$.

Rozważmy sferę S^{n-1} jako $\mathrm{SO}(n)$-rozmaitość. Wówczas przestrzeń Sobolewa $H^1(S^{n-1})$ z iloczynem skalarnym

$$\langle u, v\rangle_{H^1(S^{n-1})} = \int\limits_{S^{n-1}} \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle + u(x) \cdot v(x) d\sigma$$

jest ortogonalną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją z działaniem $\mathrm{SO}(n) \times H^1(S^{n-1}) \to H^1(S^{n-1})$ zadanym wzorem $(g, u)(x) \mapsto u(g^{-1}x)$. Jeżeli sferę S^{n-1} rozpatrzymy jako $\mathrm{SO}(2)$-rozmaitość, to działanie na przestrzeni $H^1(S^{n-1})$ zadajemy poprzez przyporządkowanie $(g, u)(x) \mapsto u(gx)$. Wówczas $H^1(S^{n-1})$ jest ortogonalną $\mathrm{SO}(2)$-reprezentacją.

Zauważmy, że kula geodezyjna $B(\alpha) \subset S^n$ jest $\mathrm{SO}(n)$-rozmaitością z działaniem zadanym wzorem $(g, (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) \mapsto (g(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$ oraz przestrzenie Sobolewa na kuli geodezyjnej $H^1(B(\alpha))$, $H^1_0(B(\alpha))$ z iloczynami skalarnymi

$$\langle u, v\rangle_{H^1(B(\alpha))} = \int\limits_{B(\alpha)} \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle + u(x) \cdot v(x) d\sigma$$

oraz odpowiednio

$$\langle u, v\rangle_{H^1_0(B(\alpha))} = \int\limits_{B(\alpha)} \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \, d\sigma$$

są ortogonalnymi $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacjami z działaniem $\mathrm{SO}(n) \times H^1(B(\alpha)) \to H^1(B(\alpha))$ (odpowiednio $\mathrm{SO}(n) \times H^1_0(B(\alpha)) \to H^1_0(B(\alpha))$) zadanym wzorem $(g, u)(x) \mapsto u(g^{-1}x)$. Ponadto przestrzenie $H^1(B(\alpha))$, $H^1_0(B(\alpha))$ są ortogonalnymi $\mathrm{SO}(2)$-reprezentacjami z działaniem $(g, u)(x) \mapsto u(gx)$.

W dalszym ciągu rozprawy będziemy potrzebować następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.2.7. *Załóżmy, że G jest zwartą grupą Liego oraz $\mathbb{V}$ przestrzenią Hilberta będącą ortogonalną G-reprezentacją. Ustalmy funkcjonał $\Phi \in C^2_G(\mathbb{V} \times \mathbb{R})$ taki, że $\nabla_u \Phi(0, \lambda) = 0$ oraz $\nabla^2_u \Phi(0, \lambda)$ jest operatorem Fredholma indeksu 0 dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech $\lambda_{m_0} \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $\nabla^2_u \Phi(0, \lambda_{m_0})$ nie jest izomorfizmem. Wówczas istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ taki, że $(0, \lambda_{m_0}) \in U$ oraz dla każdego $(\tilde{u}, \lambda) \in (U \cap (\nabla_u \Phi)^{-1}(0)) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ istnieje $\overline{u} \in \ker \nabla^2_u \Phi(0, \lambda_{m_0}) \setminus \{0\}$ takie, że $G_{\tilde{u}} = G_{\overline{u}}$.*

Co więcej, jeżeli $\ker \nabla^2_u \Phi(0, \lambda_{m_0})^G = \{0\}$, to dla każdego $(\tilde{u}, \lambda) \in (U \cap (\nabla_u \Phi)^{-1}(0)) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ zachodzi $G_{\tilde{u}} \neq G$.

Dla dowodu tego twierdzenia wystarczy przeprowadzić rozumowanie z dowodu lematu ze strony 287 z pracy [13].

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Hilberta, która jest ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G oraz niech funkcjonał $\Phi \in C^1_G(\mathbb{V} \times \mathbb{R})$ będzie taki, że $\nabla_u \Phi(0, \lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definicja 1.2.10. Powiemy, że punkt $(0, \lambda_{m_0}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest punktem globalnej bifurkacji, w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii rozwiązań równania $\nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0$, jeżeli jest punktem bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0$ oraz istnieje otwarte otoczenie $U \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ punktu $(0, \lambda_{m_0})$ takie, że $G_{(u,\lambda)} \neq G$ dla każdego $(u, \lambda) \in (U \cap (\nabla_u \Phi)^{-1}(0)) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$.

1.3 Pierścień Eulera

W tym podrozdziale opiszemy pierścień Eulera zwartej grupy Liego G, ze szczególnym uwzględnieniem przypadku, gdy grupa G jest torusem. Materiał zawarty w tym podrozdziale pochodzi z następujących pozycji literatury: [15], [16], [19].

Definicja 1.3.1. Niech X oraz Y będą G-przestrzeniami. Odwzorowanie $h\colon X \times [0, 1] \to Y$ nazywamy G-współzmienniczą homotopią (G-homotopią), jeżeli jest odwzorowaniem ciągłym oraz $h(\cdot, t)\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem G-współzmienniczym dla każdego $t \in [0, 1]$.

Definicja 1.3.2. G-przestrzenią z wyróżnionym punktem nazywamy parę $(X, *)$ składającą się z G-przestrzeni X oraz wyróżnionego punktu $* \in X^G$.

Przez $\mathcal{T}(G)$ oznaczamy kategorię, której obiektami są G-przestrzenie a morfizmami G-odwzorowania. Przez $\mathcal{T}_*(G)$ oznaczamy kategorię, której obiektami są G-przestrzenie z wyróżnionym punktem a morfizmami G-odwzorowania zachowujące punkty bazowe.

Definicja 1.3.3. Niech X, $Y \in \mathcal{T}_*(G)$.

1. Odwzorowanie $h\colon X \times [0, 1] \to Y$ nazywamy G-homotopią, jeżeli dla każdego $t \in [0, 1]$, $h_t(\cdot) = h(\cdot, t)$ jest G-odwzorowaniem.
2. Niech $f_0, f_1\colon X \to Y$ będą G-odwzorowaniami. Mówimy, że odwzorowania f_0, f_1 są G-homotopijne, jeżeli istnieje G-homotopia $h\colon X \times [0, 1] \to Y$ taka, że $h(\cdot, 0) = f_0(\cdot)$ oraz $h(\cdot, 1) = f_1(\cdot)$.
3. Niech $f\colon X \to Y$ będzie G-odwzorowaniem. Mówimy, że f jest G-homotopijną równoważnością, jeżeli istnieje G-odwzorowanie $e\colon Y \to X$ takie, że $e \circ f$ jest G-homotopijne z Id_X oraz $f \circ e$ jest G-homotopijne z Id_Y.
4. Jeżeli istnieje G-homotopijna równoważność $f\colon X \to Y$ to mówimy, że przestrzenie X i Y mają ten sam G-typ homotopii.

Dla $X, Y \in \mathcal{T}_*(G)$ definiujemy relację równoważności: $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie X i Y są G-homotopijne. Przez $\mathcal{T}_*[G]$ oznaczamy zbiór klas abstrakcji tej relacji, to znaczy zbiór wszystkich G-typów homotopii G-przestrzeni z wyróżnionym punktem, zaś przez $[X]$ będziemy oznaczali klasę abstrakcji tej relacji, to znaczy G-typ homotopii G-przestrzeni X.

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą rozłącznymi G-przestrzeniami, $n \in \mathbb{N}$. Przez $X_1 \sqcup X_2$, $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ oznaczamy sumy rozłączne odpowiednio: dwóch oraz n przestrzeni.

Definicja 1.3.4. Niech (X, A) będzie parą G-przestrzeni (to znaczy $A \subset X$ oraz A jest G-niezmiennicza) i $H_1, \ldots, H_q \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$. Mówimy, że G-przestrzeń X otrzymujemy z G-przestrzeni A przez doklejenie rodziny niezmienniczych k-komórek typu orbitowego $\{(k, H_j)\colon j = 1, \ldots, q\}$, jeżeli istnieje G-odwzorowanie

$$\varphi\colon \left(\coprod_{j=1}^{q} D^k \times G/H_j, \coprod_{j=1}^{q} S^{k-1} \times G/H_j \right) \to (X, A),$$

które odwzorowuje $\coprod\limits_{j=1}^{q} B^k \times G/H_j$ homeomorficznie na $X \backslash A$.

Definicja 1.3.5. Niech (X, X_{-1}) będzie parą G-przestrzeni Hausdorffa. Jeżeli istnieje skończony ciąg G-przestrzeni $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_p = X$ taki, że

(i) $X_{-1} \in \{\{*\}, \emptyset\}$,

(ii) X_0 jest G-homeomorficzne z $X_{-1} \sqcup \coprod\limits_{j=1}^{q(0)} G/H_{j,0}$, gdzie $H_{1,0}, \ldots, H_{q(0),0} \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$,

(iii) X_k otrzymujemy z X_{k-1} przez doklejenie rodziny niezmienniczych k-komórek typu orbitowego $\{(k, H_{j,k}) : j = 1, \ldots, q(k)\}$ dla $k = 1, \ldots, p$,

to parę $(X, *)$ nazywamy skończonym G-CW-kompleksem z wyróżnionym punktem $* \in X$, zaś parę $(X, \emptyset)$ (utożsamianą z X) nazywamy skończonym G-CW-kompleksem. Zbiór X_k nazywamy k-szkieletem G-CW-kompleksu X.

Definicja 1.3.6. Niech X będzie G-CW-kompleksem, $X_{-1} \in \{\{*\}, \emptyset\}$ oraz niech X_k będzie k-szkieletem. Pod-G-CW-kompleksem G-CW-kompleksu X nazywamy zbiór Y o własnościach

(i) Y jest G-niezmienniczą podprzestrzenią przestrzeni X,

(ii) Y jest sumą X_{-1} oraz rodziny komórek przestrzeni X, których domknięcia są zawarte w Y.

Lemat 1.3.1. *Niech X będzie G-CW-kompleksem oraz niech Y będzie pod-G-CW-kompleksem kompleksu X. Wówczas X/A jest G-CW-kompleksem z k-szkieletem X_k/Y_k.*

Uzasadnienie tego lematu można znaleźć w książce [16].

Przez $\mathcal{F}_*(G)$ oznaczamy pełną podkategorię $\mathcal{T}_*(G)$, której obiektami są skończone G-CW-kompleksy z wyróżnionym punktem, zaś przez $\mathcal{F}_*[G]$ oznaczamy podzbiór $\mathcal{T}_*[G]$ zawierający G-typy homotopii skończonych G-CW-kompleksów z wyróżnionym punktem.

Oznaczmy przez $\mathbf{F}$ grupę wolną generowaną przez G-typy homotopii skończonych G-CW-kompleksów z wyróżnionym punktem oraz przez $\mathbf{N}$ podgrupę grupy $\mathbf{F}$ generowaną przez wszystkie elementy $[A] - [X] + [X/A]$ dla pod-G-CW-kompleksów A G-CW-kompleksu X.

Definicja 1.3.7. Zdefiniujmy $U(G) = \mathbf{F}/\mathbf{N}$ i oznaczmy symbolem $\chi_G([X])$ klasę elementu $[X]$ w $U(G)$. Element $\chi_G([X])$ będziemy nazywali uniwersalną G-niezmienniczą charakterystyką Eulera G-CW-kompleksu X.

Dla skrócenia zapisu będziemy pisali $\chi_G(X)$ zamiast $\chi_G([X])$.

Tak zdefiniowana charakterystyka Eulera ma następujące własności:

(i) jeżeli $X, Y \in \mathcal{F}_*(G)$ są G-homotopijnie równoważne, to $\chi_G(X) = \chi_G(Y)$,

(ii) jeżeli $A \in \mathcal{F}_*(G)$ jest pod-G-CW-kompleksem G-CW kompleksu $X \in \mathcal{F}_*(G)$, to spełniona jest równość $\chi_G(A) - \chi_G(X) + \chi_G(X/A) = 0$,

(iii) $\chi_G(*) = 0$.

Jeżeli $X \in \mathcal{F}(G)$, to przez X^+ oznaczamy przestrzeń $X \cup \{*\}$. Oczywiście $X^+ \in \mathcal{F}_*(G)$. Niech $X, Y \in \mathcal{F}_*(G)$. Zdefiniujmy:

$$X \vee Y = (X \times \{*_Y\} \cup Y \times \{*_X\}) / \{(*_X, *_Y)\}, \quad X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

Przestrzeń $X \vee Y$ nazywamy bukietem, zaś $X \wedge Y$ zawieszeniem przestrzeni X i Y. Można pokazać, że $X \times Y$, $X \vee Y$, $X \wedge Y \in \mathcal{F}_*(G)$. Na zbiorze $U(G)$ działania definiujemy następująco:

$$\chi_G(X) + \chi_G(Y) = \chi_G(X \vee Y), \quad \chi_G(X) \star \chi_G(Y) = \chi_G(X \wedge Y). \tag{1.3}$$

W poniższych twierdzeniach przedstawiamy strukturę algebraiczną zadaną na zbiorze $U(G)$.

Twierdzenie 1.3.2. *Grupa $(U(G), +)$ jest wolną grupą abelową z bazą $\chi_G(G/H^+)$, gdzie $(H) \in \overline{\mathrm{sub}}[G]$. Ponadto jeżeli $X \in \mathcal{F}_*(G)$ oraz $\bigcup\limits_{k=0}^{p} \bigcup\limits_{j=1}^{q((k)} (\{(k, (H_{j,k}))\}$ jest typem orbitowym G-CW-kompleksu X, to*

$$\chi_G(X) = \sum_{k=0}^{p} \nu_G(X, H)\, \chi_G\left(G/H_{j,k}^+\right),$$

przy czym $\nu_G((X, H) = \sum\limits_{j=1}^{q((k)} (-1)^j \nu_G(X, H, j)$ oraz $\nu_G(X, H, j)$ jest liczbą j-wymiarowych komórek typu orbitowego (H).

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w książce [16].

Na zbiorze $U(G)$ poza strukturą wolnej grupy abelowej mamy również strukturę pierścienia.

Twierdzenie 1.3.3. *Trójka $(U(G), +, \star)$ z działaniami zdefiniowanymi wzorami (1.3) jest pierścieniem przemiennym z jedynką $\mathbb{I} = \chi_G(G/G^+)$.*

Uzasadnienie powyższego twierdzenia można znaleźć w książce [16].

Pierścień $(U(G), +, \star)$ nazywamy pierścieniem Eulera grupy G.

Przejdziemy teraz do opisu pierścienia $U(T^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Grupa T^n jest przemienna oraz znane są wszystkie jej domknięte podgrupy. Z tego powodu o pierścieniu $U(T^n)$, a w szczególności o jego strukturze multiplikatywnej, można powiedzieć dużo więcej niż w ogólnym przypadku.

Dowody dwóch następnych lematów i twierdzenia można znaleźć w pracy [19].

Lemat 1.3.4. *Niech $H', H'' \in \overline{\mathrm{sub}}(T^n)$ oraz przyjmijmy $H = H' \cap H''$. Wówczas*

$$\chi_{T^n}\left((T^n/H' \times T^n/H'')^+\right) = \begin{cases} \chi_{T^n}\left(T^n/H^+\right), & \textit{jeżeli } n + \dim H = \dim H' + \dim H'', \\ 0, & \textit{jeżeli } n + \dim H > \dim H' + \dim H''. \end{cases}$$

W poniższym lemacie podajemy charakteryzację struktury multiplikatywnej pierścienia $U(T^n)$.

Lemat 1.3.5. *Ustalmy $H, H' \in \overline{\mathrm{sub}}(T^n) \setminus \{T^n\}$ oraz $m, m', m'' \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Wówczas*

(1) $\chi_{T^n}(T^n/H^+) \star \chi_{T^n}(T^n/H^+) = \Theta \in U(T^n)$,

(2) jeżeli $H \in \overline{\mathrm{sub}}(H')$, to $\chi_{T^n}(T^n/H^+) \star \chi_{T^n}(T^n/H'^+) = \Theta \in U(T^n)$,

(3) jeżeli $\chi_{T^n}(T^n/H_m^+) \star \chi_{T^n}(T^n/H_{m'}^+) \neq \Theta \in U(T^n)$, to $\dim(H_m \cap H_{m'}) = n-2$,

(4) jeżeli $H_m \cap H_{m'} = H_{m''}$, to $\chi_{T^n}(T^n/H_m^+) \star \chi_{T^n}(T^n/H_{m'}^+) = \Theta \in U(T^n)$.

Poniższe twierdzenie jest istotne przy obliczaniu stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych.

Twierdzenie 1.3.6. *Załóżmy, że $\mathbb{V}$ jest reprezentacją torusa T^n równoważną z $\mathbb{R}[k_0, 0] \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}[k_i, m_i]$, przy czym $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^n$, $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wówczas*

$$
\begin{aligned}
\chi_{T^n}\left(S^{\mathbb{V}}\right) &= (-1)^{k_0}\left(\chi_{T^n}\left(T^n/T^{n+}\right) - \sum_{i=1}^{r} k_i \cdot \chi_{T^n}\left(T^n/H_{m_i}^+\right)\right) \\
&+ \sum_{(H)\in\left\{(\mathcal{H})\in\overline{\mathrm{sub}}[T^n]:\ \dim\mathcal{H}\leqslant n-2\right\}} n(H)\cdot\chi_{T^n}\left(T^n/H^+\right),
\end{aligned}
$$

gdzie $S^{\mathbb{V}} = D(\mathbb{V})/S(\mathbb{V})$ oraz $n(H) \in \mathbb{Z}$.

Rozważmy teraz najprostszy, nietrywialny przypadek grupy $\mathrm{SO}(2)$. Ponieważ grupa $\mathrm{SO}(2)$ jest izomorficzna z $S^1 = T^1$, z lematu 1.2.5 wynika, że $\overline{\mathrm{sub}}(\mathrm{SO}(2)) = \{\mathrm{SO}(2), \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots\}$, przy czym

$$
\mathbb{Z}_m = \left\{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} : \varphi \in \frac{2i\pi}{m} : i = 0, 1, \ldots, m-1\right\} \subset \mathrm{SO}(2)
$$

dla $m \in \mathbb{N}$. Korzystając z tej zależności oraz z własności pierścienia Eulera, można uzasadnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.3.7. *Pierścień Eulera $(U(\mathrm{SO}(2)), +, \star)$ jest izomorficzny z pierścieniem $\left(\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}, +, *\right)$, w którym działania określamy następująco: dla dowolnych*

$$
\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots),\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m \ldots) \in \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}
$$

definiujemy

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &= (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_m + \beta_m, \ldots), \\
\alpha * \beta &= (\alpha_0\beta_0, \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1, \ldots, \alpha_m\beta_0 + \alpha_0\beta_m, \ldots).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że dla dowolnego $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$, element α_0 odpowiada $\alpha_0\chi_{S^1}(S^1/S^{1+}) \in U(S^1)$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, α_m odpowiada $\alpha_m\chi_{S^1}(S^1/\mathbb{Z}_n^+) \in U(S^1)$.

Połóżmy

$$
U_{\pm}(\mathrm{SO}(2)) = \left\{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in U(\mathrm{SO}(2)) : \forall_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ \pm\alpha_i \geqslant 0\right\}.
$$

Lemat 1.3.8. *Dla dowolnych* $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m \ldots) \in \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$*:*

(a) element α *jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\alpha_0 = \pm 1$*. Ponadto jeżeli* $\alpha_0 = \pm 1$*, to* $\alpha^{-1} = (\alpha_0, -\alpha_1, \ldots, -\alpha_m, \ldots)$*,*

(b) $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)^N = (\alpha_0^N, N\alpha_0^{N-1}\alpha_1, \ldots, N\alpha_0^{N-1}\alpha_m, \ldots)$*,*

(c) dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)^N \star \Big((\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots)^N - (1, 0, \ldots, 0, \ldots)\Big) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \ldots),$$

przy czym $\gamma_0 = \alpha_0^N(\beta_0^N - 1)$ *oraz* $\gamma_m = N\alpha_0^{N-1}\alpha_m(\beta_0^N - 1) + N\alpha_0^N\beta_0^{N-1}\beta_m$ *dla* $m \in \mathbb{N}$*.*

1.4 Stopień funkcjonałów niezmienniczych

W tym podrozdziale przedstawimy podstawowe fakty związane ze stopniem silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych. W tym celu naszkicujemy najpierw definicję stopnia współzmienniczych odwzorowań gradientowych, używając pojęcia specjalnych niezmienniczych funkcji Morse'a. Przedstawiony tutaj materiał pochodzi z następujących pozycji literatury: [2], [4], [20], [22], [23] i [38]. Przedstawimy również własność stopnia współzmienniczych odwzorowań gradientowych przy założeniu spójności grupy, wynik ten został opublikowany w pracy [61].

1.4.1 Stopień współzmienniczych odwzorowań gradientowych

Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową, ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G, a $\Omega \subset \mathbb{V}$ jej otwartym, ograniczonym, G-niezmienniczym podzbiorem.

Połóżmy $\overline{\mathrm{sub}}(\Omega) = \{G_v \in \overline{\mathrm{sub}}(G) \colon v \in \Omega\}$, $\overline{\mathrm{sub}}[\Omega] = \{(H) \colon H \in \overline{\mathrm{sub}}(\Omega)\}$. Ponadto dla $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$ kładziemy $\mathbb{V}_{(H)} = \{v \in \Omega \colon (G_v) = (H)\}$.

Definicja 1.4.1. Mówimy, że funkcja $\varphi \in C^1_G(\mathbb{V})$ jest Ω-dopuszczalna, jeżeli $(\nabla\varphi)^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Odwzorowanie $h \in C^1_G(\mathbb{V} \times [0,1])$ nazywamy Ω-dopuszczalną homotopią, jeżeli $(\nabla_v h)^{-1}(0) \cap (\partial\Omega \times [0,1]) = \emptyset$.

Mówimy, że dwie Ω-dopuszczalne funkcje φ_1, φ_2 są Ω-homotopijne, jeżeli istnieje Ω-dopuszczalna homotopia h taka, że $\nabla_v h(v, 0) = \nabla\varphi_1(v)$ oraz $\nabla_v h(v, 1) = \nabla\varphi_2(v)$.

Mówimy, że Ω-dopuszczalna funkcja $\varphi \in C^2_G(\mathbb{V})$ jest niezmienniczą funkcją Morse'a, jeżeli dla każdego $v_0 \in (\nabla\varphi)^{-1}(0) \cap \overline{\Omega}$ orbita $G(v_0)$ jest niezdegenerowaną orbitą krytyczną, to znaczy $\dim\ker \nabla^2\varphi(v_0) = \dim G(v_0)$.

Niech $\varphi \in C^2_G(\mathbb{V})$ będzie niezmienniczą funkcją Morse'a. Mówimy, że funkcja φ jest specjalną niezmienniczą funkcją Morse'a, jeżeli dla każdego $v_0 \in (\nabla\varphi)^{-1}(0) \cap \overline{\Omega}$ orbita $G(v_0)$ jest specjalną niezdegenerowaną orbitą krytyczną, to znaczy $m^-(\nabla^2\varphi(v_0)) = m^-(\nabla^2\varphi_{|\mathbb{V}_{(G_{v_0})}}(v_0))$, przy czym $m^-(\nabla^2\varphi(v_0))$ oznacza indeks Morse'a (liczbę ujemnych wartości własnych) macierzy $\nabla^2\varphi(v_0)$.

Niech $\varphi \in C^2_G(\mathbb{V})$ będzie specjalną niezmienniczą funkcją Morse'a na Ω. Wówczas zbiór $(\nabla\varphi)^{-1}(0) \cap \overline{\Omega}$ składa się ze skończonej liczby orbit, zatem istnieją punkty $v_1, \ldots, v_k \in \Omega$ takie, że $(\nabla\varphi)^{-1}(0) \cap \overline{\Omega} = G(v_1) \cup \ldots \cup G(v_k)$ oraz $G(v_i) \cap G(v_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$. Ustalmy zbiór $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ spełniających powyższe warunki. Dla $(H) \in \overline{\mathrm{sub}}[\Omega]$ połóżmy

$$\nabla_G\text{-}\deg_{(H)}(\nabla\phi, \Omega) = \sum_{v\in\mathcal{V},(G_v)=(H)} (-1)^{m^-\left(\nabla^2\varphi(v)\right)} \in \mathbb{Z}$$

i zdefiniujmy stopień $\nabla_G\text{-}\deg_{(H)}(\nabla\phi, \Omega) \in U(G)$ formułą

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega) = \sum_{v\in\mathcal{V},(G_v)=(H)} \nabla_G\text{-}\deg_{(H)}(\nabla\phi, \Omega) \cdot \chi_G\left(G/H^+\right).$$

Twierdzenie 1.4.1. *Niech φ_1, φ_2 będą dwiema specjalnymi funkcjami Morse'a na Ω. Jeśli φ_1, φ_2 są Ω-homotopijne, to $\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\varphi_1, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\varphi_2, \Omega)$.*

Niech $\phi \in C^1_G(\mathbb{V})$ będzie funkcją Ω-dopuszczalną. Można pokazać, że istnieje specjalna niezmiennicza funkcja Morse'a $\varphi \in C^2_G(\mathbb{V})$ taka, że odwzorowania ϕ i φ są Ω-homotopijne. Definiujemy wtedy stopień G-współzmienniczych odwzorowań gradientowych formułą

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\varphi, \Omega).$$

Z twierdzenia 1.4.1 wynika, że ta definicja nie zależy od wyboru specjalnej funkcji Morse'a φ.

W przypadku grupy przemiennej, na przykład $G = \mathrm{SO}(2)$, klasy sprzężoności domkniętych podgrup są jednoelementowe. Dla skrócenia zapisu współczynniki $\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{(H)}(\nabla\phi, \Omega)$ będziemy zapisywać jako $\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H(\nabla\phi, \Omega)$. Ponadto uwzględniając opis pierścienia $U(\mathrm{SO}(2))$ z twierdzenia 1.3.7, otrzymujemy, że stopień $\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega)$ jest równy

$$\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{\mathrm{SO}(2)}(\nabla\phi, \Omega), \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{\mathbb{Z}_1}(\nabla\phi, \Omega), \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{\mathbb{Z}_2}(\nabla\phi, \Omega), \ldots\right) \in U(\mathrm{SO}(2)).$$

Przykład 1.4.1. *Niech $m \in \mathbb{N}$, $G = \mathrm{SO}(2)$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[1, m]$. Ustalmy $r > 0$ i zdefiniujmy $\varphi \in C^2_{\mathrm{SO}(2)}(\mathbb{R}[1, m])$ wzorem $\varphi(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Wówczas*

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(\nabla\phi, B_r(\mathbb{V})) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B_r(\mathbb{V})) = (1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots) \in U(\mathrm{SO}(2)), \tag{1.4}$$

przy czym -1 znajduje się na m-tym miejscu.

Jeżeli $\mathbb{V} = \mathbb{R}[1, 0]$, to, dla ustalonego $r > 0$ i funkcji $\varphi \in C^2_{\mathrm{SO}(2)}(\mathbb{R}[1, 0])$ danej wzorem $\varphi(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, zachodzi

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(\nabla\phi, B_r(\mathbb{V})) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B_r(\mathbb{V})) = (1, 0, 0, \ldots) \in U(\mathrm{SO}(2)), \tag{1.5}$$

Lemat 1.4.2. *Dla dowolnej zwartej grupy Liego G zachodzi $\nabla_G\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V})) = \chi_G(S^{\mathbb{V}})$. Ponadto $\chi_G(S^{\mathbb{V}})$ jest elementem odwracalnym w $U(G)$.*

Dowód pierwszej części powyższego lematu można znaleźć w artykule [20], drugiej w pracy [23].

W następnym twierdzeniu podajemy główne własności stopnia G-współzmienniczych odwzorowań gradientowych.

Twierdzenie 1.4.3. *Stopień ma następujące własności:*

1. *Niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwartym, ograniczonym, G-niezmienniczym podzbiorem G-reprezentacji $\mathbb{V}$ oraz ustalmy Ω-dopuszczalną funkcję $\phi \in C^1_G(\mathbb{V})$. Wówczas*

   (i) (Istnienie rozwiązania) Jeżeli $\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega) \neq \Theta \in U(G)$, to $(\nabla\phi)^{-1}(0) \cap \Omega \neq \emptyset$.

   (ii) (Addytywność) Jeżeli $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ i $\Omega_1,\ \Omega_2$ są otwartymi, rozłącznymi, G-niezmienniczymi zbiorami, to

   $$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega_1) + \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega_2).$$

   (iii) (Wycinanie) Jeżeli $\Omega_1 \subset \Omega$ jest otwartym, G-niezmienniczym podzbiorem oraz zachodzi $(\nabla\phi)^{-1}(0) \cap \Omega \subset \Omega_1$, to

   $$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega_1).$$

   (iv) (Zawieszanie) Jeżeli $\mathbb{W}$ jest ortogonalną G-reprezentacją i $\gamma > 0$, to

   $$\nabla_G\text{-}\deg((\nabla\phi, \mathrm{Id}), \Omega \times B_\gamma(\mathbb{W})) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, \Omega).$$

   (v) (Linearyzacja) Jeżeli $0 \in \Omega$ i $\phi \in C^2_G(\Omega)$ jest takie, że $\nabla\phi(0) = 0$ oraz $\nabla^2\phi(0)\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest G-współzmienniczym, samosprzężonym izomorfizmem, to istnieje $\gamma_0 > 0$ taka, że dla każdego $\gamma < \gamma_0$ mamy

   $$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi, B_\gamma(\mathbb{V})) = \nabla_G\text{-}\deg\left(\nabla\phi^2(0), B(\mathbb{V})\right).$$

2. *(Homotopijna niezmienniczość) Ustalmy $h \in C^1_G(\mathbb{V} \times [0,1])$ takie, że spełniony jest warunek $(\nabla_u h)^{-1}(0) \cap (\partial\Omega \times [0,1]) = \emptyset$. Wówczas*

   $$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla_u h(\cdot, 0), \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla_u h(\cdot, 1), \Omega).$$

3. *(Formuła produktowa) Niech $\Omega_1 \subset \mathbb{V}_1,\ \Omega_2 \subset \mathbb{V}_2$ będą otwartymi, ograniczonymi G-niezmienniczymi podzbiorami G-reprezentacji $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$. Załóżmy, że odwzorowanie $\phi_i \in C^1_G(\mathbb{V}_i)$ jest Ω_i-dopuszczalne dla $i = 1, 2$. Wówczas $\nabla(\phi_1 + \phi_2) = (\nabla\phi_1, \nabla\phi_2)$ jest $\Omega_1 \times \Omega_2$-dopuszczalne oraz*

   $$\nabla_G\text{-}\deg((\nabla\phi_1, \nabla\phi_2), \Omega_1 \times \Omega_2) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi_1, \Omega_1) \star \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\phi_2, \Omega_2).$$

Załóżmy, że $\mathbb{V}$ jest skończenie wymiarową $SO(2)$-reprezentacją oraz przypomnijmy, że, zgodnie z twierdzeniem 1.2.3, jest ona równoważna z reprezentacją postaci $\mathbb{R}[k_0, 0] \oplus \mathbb{R}[k_1, m_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[k_r, m_r]$, przy czym $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zauważmy, że z formuły produktowej oraz wzorów (1.4)-(1.5) wynika

$$\nabla_{SO(2)}\text{-}\deg_H(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V})) = \begin{cases} (-1)^{k_0} & \text{dla } H = SO(2), \\ (-1)^{k_0+1}k_i & \text{dla } H = \mathbb{Z}_{m_i},\ \text{gdzie } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0 & \text{dla } H = \mathbb{Z}_{m_i},\ \text{gdzie } i > r. \end{cases} \tag{1.6}$$

W dalszej części rozprawy skorzystamy z następującego lematu, został on opublikowany w pracy [61].

Lemat 1.4.4. *Załóżmy, że grupa G jest spójna. Jeżeli $\mathbb{W}_1$ lub $\mathbb{W}_2$ jest nietrywialną G-reprezentacją, to $\nabla_G\text{-}\deg(-\operatorname{Id}, B(\mathbb{W}_1)) \neq \nabla_G\text{-}\deg(-\operatorname{Id}, B(\mathbb{W}_2))^{-1}$.*

Dowód. Przypomnijmy, że zgodnie z lematem 1.4.2, $\nabla_G\text{-}\deg(-\operatorname{Id}, B(\mathbb{W}_i)) = \chi_G(S^{\mathbb{W}_i})$ dla $i = 1, 2$. Przypuśćmy, że teza lematu jest fałszywa, to znaczy $\chi_G(S^{\mathbb{W}_1}) \star \chi_G(S^{\mathbb{W}_2}) = \mathbb{I} \in U(G)$. Oznaczmy przez $T \subset G$ torus maksymalny i zauważmy, że ponieważ $\mathbb{W}_i$ są G-reprezentacjami, to są również T-reprezentacjami. Naturalny homomorfizm $i\colon T \to G$ indukuje homomorfizm pierścieni $i^*\colon U(T) \to U(G)$ taki, że $i^*(\chi_G(S^{\mathbb{W}_i})) = \chi_T(S^{\mathbb{W}_i})$. Zatem $\chi_T(S^{\mathbb{W}_1}) \star \chi_T(S^{\mathbb{W}_2}) = \mathbb{I} \in U(T)$. Z twierdzenia 1.3.6 wynika, że istnieją $k_0, k_1, \ldots, k_r, k_0', k_1', \ldots, k_{r'}' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $H_{m_1}, \ldots, H_{m_r}, H_{m_1'}, \ldots, H_{m_{r'}'} \in \overline{\operatorname{sub}}(T)$, $x, x', y, y' \in U(T)$ takie, że

(i) $\dim H_{m_i} = \dim H_{m_j'} = \dim T - 1$ dla każdych $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, r'$,

(ii) $x = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i \cdot \chi_T(T/H_{m_i}^+)$,

(iii) $x' = \sum\limits_{j=1}^{r'} k_j' \cdot \chi_T(T/H_{m_j'}^+)$,

(iv) $y = \sum\limits_{(H) \in \{(\mathcal{H}) \in \overline{\operatorname{sub}}[T]\colon \dim \mathcal{H} < \dim T - 1\}} n(H) \cdot \chi_T(T/H^+)$, gdzie $n(H) \in \mathbb{Z}$,

(v) $y' = \sum\limits_{(H) \in \{(\mathcal{H}) \in \overline{\operatorname{sub}}[T]\colon \dim \mathcal{H} < \dim T - 1\}} n'(H) \cdot \chi_T(T/H^+)$, gdzie $n'(H) \in \mathbb{Z}$,

(vi) $\chi_T(S^{\mathbb{W}_1}) = (-1)^{k_0}\mathbb{I} - (-1)^{k_0}x + y$,

(vii) $\chi_T(S^{\mathbb{W}_2}) = (-1)^{k_0'}\mathbb{I} - (-1)^{k_0'}x' + y'$.

Ponieważ G jest grupą spójną, $x \neq \Theta$ lub $x' \neq \Theta \in U(T)$. Zatem

$$\begin{aligned}
&\Big((-1)^{k_0}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0}\,x + y\Big)\Big((-1)^{k_0'}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0'}\,x' + y'\Big)\\
&= (-1)^{k_0+k_0'}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0+k_0'}\,x - (-1)^{k_0+k_0'}\,x'\\
&+ (-1)^{k_0'}\,y + (-1)^{k_0}\,y' + (-1)^{k_0+k_0'}\,xx' - (-1)^{k_0}\,xy' - (-1)^{k_0'}\,x'y + yy'.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli $k_0 + k_0'$ jest liczbą parzystą, to $(-1)^{k_0+k_0'} = 1$ oraz

$$(-1)^{k_0+k_0'}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0+k_0'}\,x - (-1)^{k_0+k_0'}\,x' = \mathbb{I} - x - x' \neq \mathbb{I}.$$

Jeżeli $k_0 + k_0'$ jest liczbą nieparzystą, to $(-1)^{k_0+k_0'} = -1$ oraz

$$(-1)^{k_0+k_0'}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0+k_0'}\,x - (-1)^{k_0+k_0'}\,x' = -\mathbb{I} + x + x' \neq \mathbb{I}.$$

Z własności mnożenia w $U(T)$ z lematu 1.3.5 wynika

$$\begin{aligned}
&(-1)^{k_0'}\,y + (-1)^{k_0}\,y' + (-1)^{k_0+k_0'}\,xx' - (-1)^{k_0}\,xy' - (-1)^{k_0'}\,x'y + yy'\\
&\qquad = \sum_{(H) \in \{(\mathcal{H}) \in \overline{\operatorname{sub}}[T]\colon \dim \mathcal{H} < \dim T - 1\}} n''(H) \cdot \chi_T\left(T/H^+\right),
\end{aligned}$$

gdzie $n''(H) \in \mathbb{Z}$. Zatem

$$\chi_T\left(S^{\mathbb{W}_1}\right) \star \chi_T\left(S^{\mathbb{W}_2}\right) = \Big((-1)^{k_0}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0}\,x + y\Big)\Big((-1)^{k_0'}\,\mathbb{I} - (-1)^{k_0'}\,x' + y'\Big) \neq \mathbb{I}.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

1.4.2 Stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych

Przejdziemy teraz do opisu stopnia odwzorowań współzmienniczych w przypadku nieskończenie wymiarowym, to znaczy zdefiniujemy i opiszemy podstawowe własności stopnia G-niezmienniczych silnie nieokreślonych funkcjonałów, który został zdefiniowany w pracy [23].

Niech $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie nieskończenie wymiarową, ośrodkową przestrzenią Hilberta, która jest ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G. Niech $\Gamma = \{\tau_n \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V} \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ będzie ciągiem G-współzmienniczych rzutów ortogonalnych.

Definicja 1.4.2. Zbiór Γ nazywamy G-niezmienniczym schematem aproksymacyjnym na $\mathbb{V}$, jeżeli

(i) dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ przestrzeń $\mathbb{V}^n = \operatorname{im} \tau_n(\mathbb{V})$ jest skończenie wymiarową podreprezentacją reprezentacji $\mathbb{V}$,

(ii) dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ przestrzeń $\mathbb{V}^n$ jest składnikiem prostym $\mathbb{V}^{n+1}$, to znaczy istnieje podreprezentacja $\mathbb{V}_{n+1}$ reprezentacji $\mathbb{V}^{n+1}$ taka, że $\mathbb{V}^{n+1} = \mathbb{V}^n \oplus \mathbb{V}_{n+1}$ oraz $\mathbb{V}^n \perp \mathbb{V}_{n+1}$,

(iii) dla każdego $u \in \mathbb{V}$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \tau_n(u) = u$.

Załóżmy, że

(a1) $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest otwartym, ograniczonym oraz G-niezmienniczym zbiorem,

(a2) $L \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest liniowym, ograniczonym, samosprzężonym, G-współzmienniczym operatorem Fredholma spełniającym następujące warunki:

  (a) $\ker L = \mathbb{V}^0$,

  (b) $\tau_n \circ L = L \circ \tau_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(a3) $\nabla\eta \colon \Omega \to \mathbb{V}$ jest ciągłym, G-współzmienniczym operatorem zwartym,

(a4) $\Phi \in C^1_G(\Omega)$ spełnia następujące założenia:

  (a) $\nabla\Phi(u) = Lu - \nabla\eta(u)$,

  (b) $\operatorname{cl}((\nabla\Phi)^{-1}(0)) \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Przy powyższych założeniach definiujemy stopień G-niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych następująco

$$\nabla_G\text{-}\deg(L - \nabla\eta, \Omega) = \left(\nabla_G\text{-}\deg\left(L, B\left(\mathbb{V}^n \ominus \mathbb{V}^0\right)\right)\right)^{-1} \star \nabla_G\text{-}\deg(L - \tau_n\nabla\eta, \Omega_\epsilon \cap \mathbb{V}^n) \in U(G), \tag{1.7}$$

przy czym $\epsilon > 0$ jest dostatecznie mały, $n \in \mathbb{N}$ jest odpowiednio duże oraz $\Omega_\epsilon = ((\nabla\Phi)^{-1}(0) \cap \Omega) + B_\epsilon(\mathbb{V})$. Z lematu 1.4.2 wynika, że powyższy stopień jest dobrze określony.

Dowód poniższych własności stopnia można znaleźć w pracy [23].

Twierdzenie 1.4.5. *Stopień ma następujące własności:*

1. *(i) (Istnienie rozwiązania) Jeżeli* $\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega) \neq \Theta \in U(G)$*, to* $(\nabla\Phi)^{-1}(0) \cap \Omega \neq \emptyset$.

   (ii) (Addytywność) Jeżeli $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *i* Ω_1, Ω_2 *są otwartymi, rozłącznymi, G-niezmienniczymi zbiorami, to*

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega_1) + \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega_2).$$

   (iii) (Wycinanie) Jeżeli $\Omega_1 \subset \Omega$ *jest otwartym, G-niezmienniczym podzbiorem oraz zachodzi* $(\nabla\Phi)^{-1}(0) \cap \Omega \subset \Omega_1$*, to*

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega_1).$$

   (iv) (Zawieszanie) Jeżeli $\mathbb{W}$ *jest ortogonalną G-reprezentacją i* $\gamma > 0$*, to*

$$\nabla_G\text{-}\deg((\nabla\Phi, \mathrm{Id}), \Omega \times B_\gamma(\mathbb{W})) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega).$$

   (v) (Linearyzacja) Jeżeli $0 \in \Omega$ *i* $\Phi \in C^2_G(\Omega)$ *jest takie, że* $\nabla\Phi(0) = 0$ *oraz* $\nabla^2\Phi(0)\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *jest G-współzmienniczym, samosprzężonym izomorfizmem, to istnieje* $\gamma_0 > 0$ *taka, że dla każdego* $\gamma < \gamma_0$ *mamy*

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, B_\gamma(\mathbb{V})) = \nabla_G\text{-}\deg\left(\nabla\Phi^2(0), B(\mathbb{V})\right).$$

2. *(Homotopijna niezmienniczość) Ustalmy* $\Phi \in C^1_G(\mathbb{V} \times [0,1])$ *takie, że spełniony jest warunek* $(\nabla_u\Phi)^{-1}(0) \cap (\partial\Omega \times [0,1]) = \emptyset$ *oraz* $\nabla_u\Phi(u,t) = Lu - \nabla_u\eta(u,t)$*, gdzie* $\nabla_u\eta\colon \Omega \times [0,1] \to \mathbb{V}$ *jest odwzorowaniem G-współzmienniczym i zwartym. Wówczas*

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla_u\Phi(\cdot, 0), \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla_u\Phi(\cdot, 1), \Omega).$$

3. *(Formuła produktowa) Niech* $\Omega_1 \subset \mathbb{V}_1$, $\Omega_2 \subset \mathbb{V}_2$ *będą otwartymi, ograniczonymi G-niezmienniczymi podzbiorami G-reprezentacji* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$*. Załóżmy, że funkcjonały* $\Phi_i \in C^1_G(\mathbb{V}_i)$, $i = 1, 2$ *są postaci* $\Phi_i(u) = \frac{1}{2}\langle L_i u, u\rangle + \eta_i(u)$ *oraz spełniają założenia (a1)-(a4). Zdefiniujmy funkcjonał* $\Phi \in C^1_G(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2)$ *formułą* $\Phi(u_1, u_2) = \Phi(u_1) + \Phi(u_2)$ *oraz zbiór* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$*. Wówczas*

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi, \Omega) = \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi_1, \Omega_1) \star \nabla_G\text{-}\deg(\nabla\Phi_2, \Omega_2).$$

Twierdzenie 1.4.6. *Ustalmy* $\Phi \in C^2_G(\mathbb{V} \times \Lambda)$ *takie, że* $\nabla_u\Phi(u,\lambda) = Lu - \nabla_u\eta(u,\lambda)$*, przy czym odwzorowanie* $\nabla_u\eta\colon \Omega \times \Lambda \to \mathbb{V}$ *jest G-współzmiennicze oraz zwarte. Przypuśćmy, że* $\nabla_u\Phi(0,\lambda) = 0$ *dla każdego* $\lambda \in \Lambda$*. Jeżeli istnieją* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ *oraz* $\gamma > 0$ *takie, że*

$$\nabla_G\text{-}\deg(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_1), B_\gamma(\mathbb{V})) \neq \nabla_G\text{-}\deg(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_2), B_\gamma(\mathbb{V})),$$

to na każdej drodze łączącej $(0, \lambda_1)$ *i* $(0, \lambda_2)$ *istnieje punkt globalnej bifurkacji rozwiązań równania* $\nabla_u\Phi(u,\lambda) = 0$.

Więcej własności stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych można znaleźć w artykułach [20], [51], natomiast ogólną teorię stopnia w pracach [2], [4]. W publikacji [3] autorzy przedstawili inne podejście do stopnia odwzorowań współzmienniczych.

1.5 Spektrum operatora Laplace'a

Przedstawimy teraz podstawowe własności wartości i przestrzeni własnych operatorów Laplace'a na zbiorze otwartym i Laplace'a–Beltramiego na sferze i kuli geodezyjnej. W dalszej części tego podrozdziału scharakteryzujemy podprzestrzenie własne operatora Laplace'a–Beltramiego jako SO(2) i SO(n)-reprezentacje. Opiszemy również własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a na kulach B^2 i B^3. Przedstawiony materiał pochodzi z następujących pozycji literatury: [5], [6], [26], [39], [48], [52], [55], [62] i [65].

1.5.1 Spektrum operatora Laplace'a na zbiorze otwartym

Rozważmy równanie

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu u \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{na} \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Element $u \in H^1(\Omega)$ nazywamy słabym rozwiązaniem zagadnienia (1.8), o ile spełnione jest następujące równanie

$$\forall_{v \in H^1(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle - \mu u(x) \cdot v(x) dx = 0.$$

Element $\mu \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać wartością własną operatora Laplace'a, Dla ustalonego $\mu \in \sigma(-\Delta; \Omega)$ przez $V_{-\Delta}(\mu)$ oznaczamy zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (1.8).

W poniższym twierdzeniu zbieramy podstawowe własności zbioru $\sigma(-\Delta; \Omega)$.

Twierdzenie 1.5.1. *Przy powyższych założeniach:*

(1) $\sigma(-\Delta; \Omega) = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\} \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem przeliczalnym, jedynym punktem skupienia tego zbioru jest* ∞*,*

(2) podprzestrzeń $V_{-\Delta}(\mu_i) \subset H^1(\Omega)$ *jest skończenie wymiarowa dla dowolnego* $\mu_i \in \sigma(-\Delta; \Omega)$*,*

(3) podprzestrzeń $V_{-\Delta}(0)$ *składa się jedynie z funkcji stałych i jest izomorficzna z* $\mathbb{R}$*,*

(4) $H^1(\Omega) = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma(-\Delta; \Omega)} V_{-\Delta}(\mu_i)}$*,*

(5) połóżmy $V = \bigoplus_{j=1}^{p} H^1(\Omega)$*, wówczas* $V = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma(-\Delta; \Omega)} \bigoplus_{j=1}^{p} V_{-\Delta}(\mu_i)}$*.*

W dalszym ciągu rozprawy będziemy potrzebowali następującego, technicznego lematu.

Lemat 1.5.2. *Niech* $\{e_1, \ldots, e_m\}$*,* $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *będą bazami przestrzeni* $\mathbb{R}^m$ *oraz niech* $\mu_k \in \sigma(-\Delta; \Omega)$*. Zdefiniujmy przestrzenie*

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) \cdot e_i \colon \varphi_i \in V_{-\Delta}(\mu_k) \right\}, \ W = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) \cdot f_i \colon \varphi_i \in V_{-\Delta}(\mu_k) \right\}.$$

Wówczas $V = W$*.*

W dalszym ciągu tego podrozdziału opiszemy własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a na kuli $B^2 \subset \mathbb{R}[1,1]$ i $B^3 \subset \mathbb{R}[1,1] \oplus \mathbb{R}[1,0]$.

Rozważmy równanie

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{w } B^2, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{na } S^1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ będą takie, że jeśli $k \in \mathbb{N}$, to $n \in \mathbb{N}$. Przez x_{kn} oznaczamy n-te rozwiązanie równania $J_k'(x) = 0$ w przedziale $(0, +\infty)$, gdzie J_k jest k-tą funkcją Bessela. Jeśli $k = 0$, to $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i przez x_{0n} oznaczamy n-te rozwiązanie równania $J_0'(x) = 0$ w $[0, +\infty)$. Zauważmy, że $x_{00} = 0$.

Lemat 1.5.3. *Przy powyższych założeniach*

$$\sigma(-\Delta; B^2) = \left\{\mu_{kn} = x_{kn}^2\right\}_{k,n=1}^{\infty} \cup \left\{\mu_{0n} = x_{0n}^2\right\}_{n=0}^{\infty}$$

z odpowiadającymi wektorami własnymi w biegunowym układzie współrzędnych zadanymi następująco:

(1) jeśli $k > 0$, to $n > 0$ i wartości własnej μ_{kn} odpowiadają wektory własne

$$v_{kn}^1(r, \theta) = J_k(x_{kn} r) \cos k\theta, \ v_{kn}^2(r, \theta) = J_k(x_{kn} r) \sin k\theta,$$

(2) jeśli $k = 0$, to wartości własnej μ_{0n} odpowiada wektor własny $v_{0n}(r, \theta) = J_0(x_{0n} r)$.

Z powyższego opisu wektorów własnych wynika następujący lemat, charakteryzujący podprzestrzenie własne zagadnienia (1.9) jako SO(2)-reprezentacje:

Lemat 1.5.4. *Jeśli $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\mu_{kn} \in \sigma(-\Delta; B^2)$, to $\mathbb{R}[1, k] \subset V_{-\Delta}(\mu_{kn})$. Dodatkowo, $V_{-\Delta}(\mu_{00}) = \mathbb{R}[1, 0]$.*

Dowód poniższego lematu można znaleźć w książce [65].

Lemat 1.5.5. *Dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$, $\mu_{k1} \in \sigma(-\Delta; B^2)$ mamy $k(k + 2) < \mu_{k1} < 2k(k + 1)$.*

Zajmiemy się teraz zagadnieniem

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{w } B^3, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{na } S^2. \end{cases} \tag{1.10}$$

Niech $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Przez y_{kn} oznaczamy n-te rozwiązanie równania

$$J_{k+\frac{1}{2}}'(y) - \frac{1}{2x} J_{k+\frac{1}{2}}(y) = 0,$$

przy czym $J_{k+\frac{1}{2}}$ jest funkcją Bessela.

Lemat 1.5.6. *Przy powyższych założeniach* $\sigma(-\Delta; B^3) = \{\mu_{kn} = y_{kn}^2\}_{k=0,n=1}^{\infty}$ *z wektorami własnymi zadanymi we współrzędnych biegunowych*

(1) jeśli $k > 0$*, to wartości własnej* μ_{kn} *odpowiadają wektory własne*

$$\begin{aligned} v^1_{mkn}(r,\theta_2,\theta_1) &= \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k+\frac{1}{2}}(y_{kn}r) P_{km}(\cos\theta_1)\sin m\theta_2 \ \textit{dla}\ m = 1,\ldots,k, \\ v^2_{mkn}(r,\theta_2,\theta_1) &= \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k+\frac{1}{2}}(y_{kn}r) P_{km}(\cos\theta_1)\cos m\theta_2 \ \textit{dla}\ m = 1,\ldots,k, \\ v_{0kn}(r,\theta_2,\theta_1) &= P_k(\cos\theta_1),\ \textit{dla}\ m = 0, \end{aligned}$$

(2) jeśli $k = 0$*, to wartości własnej* μ_{0n} *odpowiada wektor własny* $v_{00n}(r,\theta_2,\theta_1) = J_{\frac{1}{2}}(y_{0n}r)$*,*

gdzie P_k*,* P_{km} *są funkcjami Legendre'a,* $m = 1,\ldots,k$*.*

Z powyższego opisu wektorów własnych wynika następujący lemat, charakteryzujące podprzestrzenie zagadnienia (1.10) jako SO(2)-reprezentacje:

Lemat 1.5.7. *Jeśli* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\mu_{kn} \in \sigma(-\Delta; B^3)$*, to* $\mathbb{R}[1,m] \subset V_{-\Delta}(\mu_{kn})$ *dla każdego* $m = 1,\ldots,k$*. Dodatkowo,* $V_{-\Delta}(\mu_{00}) = \mathbb{R}[1,0]$*.*

1.5.2 Spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na sferze

Rozważmy równanie

$$-\Delta_{S^{n-1}} u = \mu u \quad \text{na} \quad S^{n-1}. \tag{1.11}$$

Element $u \in H^1(S^{n-1})$ nazywamy słabym rozwiązaniem równania (1.11), o ile

$$\forall_{v\in H^1(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle - \mu u(x)\cdot v(x) d\sigma = 0.$$

Element $\mu \in \mathbb{R}$, dla którego istnieje niezerowe słabe rozwiązanie powyższego zagadnienia będziemy nazywać wartością własną operatora Laplace'a–Beltramiego, zaś zbiór tych elementów będziemy nazywać spektrum tego operatora i oznaczać $\sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$. Połóżmy $\sigma^-(-\Delta_{S^{n-1}}) = \{-\mu_m\colon \mu_m \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})\}$. Dla ustalonego $\mu \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$ przez $V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu)$ oznaczamy zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (1.11).

W poniższym twierdzeniu sformułujemy podstawowe własności wartości i podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a-Beltramiego.

Twierdzenie 1.5.8. *Przyjmijmy powyższe oznaczenia. Wówczas*

(1) $\sigma(-\Delta_{S^{n-1}}) = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\}$*,*

(2) podprzestrzeń $V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu_i) \subset H^1(S^{n-1})$ *jest skończenie wymiarowa dla dowolnego* $\mu_i \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$*,*

(3) podprzestrzeń $V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(0)$ *składa się jedynie z funkcji stałych i jest izomorficzna z* $\mathbb{R}$*,*

(4) $H^1(S^{n-1}) = \overline{\bigoplus_{\mu_i\in\sigma(-\Delta_{S^{n-1}})} V_{-\Delta}(\mu_i)}$*,*

(5) połóżmy $V = \bigoplus_{j=1}^{p} H^1(\Omega)$*, wówczas* $V = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})} \bigoplus_{j=1}^{p} V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu_i)}$.

Oznaczmy przez H^n_m przestrzeń liniową jednorodnych wielomianów harmonicznych stopnia m o n zmiennych, to znaczy

$$H^n_m = \left\{ f = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \colon \Delta f = 0 \right\}.$$

Wiadomo, że

$$\dim H^n_m = \frac{(n+m-3)! \cdot (n+2m-2)}{(n-2)! \cdot m!}, \tag{1.12}$$

vide [63]. Liniową przestrzeń obcięć elementów H^n_m do S^{n-1} będziemy oznaczać $\mathcal{H}^n_m$. Zauważmy, że $\dim H^n_m = \dim \mathcal{H}^n_m$. Można pokazać, że przestrzeń $\mathcal{H}^n_m$ jest reprezentacją grupy SO(2), vide [52].

Dowód poniższego lematu można znaleźć w książkach [26], [55].

Lemat 1.5.9. *Przy powyższych założeniach*

(1) $L^2(S^{n-1}) = \overline{\bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}^n_m}$*,*

(2) dla dowolnych $(n,m) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$*,* $\mathcal{H}^n_m$ *jest podprzestrzenią własną operatora* $\Delta_{S^{n-1}}$*,*

(3) dla dowolnego $u \in \mathcal{H}^n_m$ *zachodzi równość* $\Delta_{S^{n-1}} u = -m(m+n-2) \cdot u$.

Z powyższego lematu wynika, że $\sigma(-\Delta_{S^{n-1}}) = \{m(m+n-2) \colon m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ oraz dla dowolnego $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi równość $V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu_m) = \mathcal{H}^n_m$.

W następnym lemacie opisujemy przestrzenie $\mathcal{H}^n_m$ jako SO(2)-reprezentacje.

Lemat 1.5.10. *Dla dowolnych* $(n,m) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ *istnieją*

(i) $p^n_m \geqslant 1$*,*

(ii) $k_0^{(n,m)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* $k_1^{(n,m)}, \ldots, k_{r(n,m)}^{(n,m)} \in \mathbb{N}$*,*

(iii) $0 = m_0^{(n,m)} < m_1^{(n,m)} < \ldots < m_{r(n,m)}^{(n,m)} < m$

takie, że

$$\mathcal{H}^n_m \approx \mathbb{R}[p^n_m, m] \oplus \bigoplus_{i=0}^{r(n,m)} \mathbb{R}[k_i^{(n,m)}, m_i^{(n,m)}].$$

Dowód powyższego lematu można znaleźć w artykule [52].

Twierdzenie 1.5.11. *Dla dowolnych* $(n,m) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$*, przestrzeń* $\mathcal{H}^n_m$ *jest nieprzywiedlną reprezentacją grupy* SO(n)*. Co więcej,* $\mathcal{H}^n_0$ *jest reprezentacją trywialną.*

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w książce [26].

1.5.3 Spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na kuli geodezyjnej

Rozważmy następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} -\Delta_{S^n} u = \mu u & \text{w } B(\alpha), \\ u = 0 & \text{na } \partial B(\alpha). \end{cases} \tag{1.13}$$

Oznaczmy przez $\sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$ zbiór wszystkich wartości własnych problemu (1.13), przez $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$ podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej μ_m oraz położmy

$$\sigma_D^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) = \{-\mu \colon \mu \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\}.$$

W poniższym twierdzeniu zbieramy podstawowe własności zbioru $\sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$.

Twierdzenie 1.5.12. *Przy powyższych założeniach:*

(1) $\sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) = \{0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\} \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem przeliczalnym, jedynym punktem skupienia tego zbioru jest* ∞*,*

(2) dla dowolnego $\mu_i \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$ *podprzestrzeń* $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_i) \subset H_0^1(B(\alpha))$ *jest skończenie wymiarowa,*

(3) $H_0^1(B(\alpha)) = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))} V_{-\Delta_{S^n}(\mu_i)}}$*,*

(4) położmy $\mathbb{V} = \bigoplus_{j=1}^{p} H_0^1(B(\alpha))$*, wówczas* $\mathbb{V} = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))} \bigoplus_{j=1}^{p} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_i)}$*.*

Niech (t, θ) będą współrzędnymi biegunowymi na S^n, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Wektory własne w zagadnieniu (1.13) są postaci: $u(t, \theta) = T_l(t) v_l(\theta)$, vide [5], przy czym $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $v_l(\theta)$ jest harmoniką sferyczną stopnia l, to znaczy v_l rozwiązuje równanie

$$\Delta_{S^{n-1}} v(\theta) = -\beta_l v(\theta), \text{ gdzie } \beta_l = l(n + l - 2).$$

Ponadto T_l rozwiązuje równanie

$$T''(t) + (n-1)(\operatorname{ctg} t) T'(t) + \left(\mu - \frac{\beta_l}{\sin^2 t}\right) T(t) = 0 \tag{1.14}$$

oraz jest postaci

$$T_l(t) = (\sin t)^l F\left(1 + \eta + \xi, \eta - \xi, 1 + \eta, \sin^2 \frac{t}{2}\right) = \frac{(\sin t)^l}{(\cos \frac{t}{2})^{n+2l-2}} F\left(-\xi, 1 + \xi, 1 + \eta, \sin^2 \frac{t}{2}\right)$$

dla $t < \pi$ i

$$T_l(t) = F\left(\frac{1 + \eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}, 1 + \eta, \sin^2 t\right) = (\sin t)^l (\cos t) F\left(\frac{1 + \eta - \xi}{2}, \frac{2 + \eta + \xi}{2}, 1 + \eta, \sin^2 t\right)$$

dla $t < \frac{\pi}{2}$, przy czym F jest hipergeometryczną funkcją Gaussa, $\eta = l - 1 + \frac{n}{2}$ oraz $\xi = \frac{1}{2}(-1 + (4\mu + (n-1)^2)^{\frac{1}{2}})$.

Oznaczmy przez A_l zbiór wszystkich dodatnich μ takich, że $T_l(t) = 0$. Z ogólnych własności wartości własnych oraz z twierdzenia 1.5.12 wynika, że zbiory A_l są przeliczalne oraz zbiór wartości własnych problemu (1.13) jest sumą zbiorów A_l, gdzie $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Twierdzenie 1.5.13. *Liczba elementów zbioru* $A_l \cap ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)]$ *jest mniejsza lub równa 1 dla każdych* $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uzasadnienie tego oraz poniższego twierdzenia można znaleźć w pracy [5].

Twierdzenie 1.5.14. *Przy powyższych założeniach*

$$\sigma_D\left(-\Delta_{S^n}; B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \{\mu_m = m(n+m-1)\colon m \in \mathbb{N}\}$$

oraz

$$V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m) = \bigoplus_{l\colon \exists_{p\in\mathbb{N}\cup\{0\}} m=2p+l+1} \mathcal{H}_l^n.$$

Ponadto μ_m *jest krotności* $\binom{n+m-2}{n-1}$ *dla każdego* $m \in \mathbb{N}$.

Z powyższego twierdzenia natychmiast wynika następujący wniosek:

Wniosek 1.5.15. *Ustalmy* $\mu_m \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\frac{\pi}{2}))$.

1. *Jeżeli* m *jest liczbą parzystą, to* $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m) = \mathcal{H}_1^n \oplus \mathcal{H}_3^n \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{m-1}^n$.
2. *Jeżeli* m *jest liczbą nieparzystą, to* $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m) = \mathcal{H}_0^n \oplus \mathcal{H}_2^n \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{m-1}^n$.

W konsekwencji, $\mathcal{H}_{m-1}^n \subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$ *oraz* $\mathcal{H}_{m-1}^n \not\subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{\tilde{m}})$ *dla każdego* $0 < \tilde{m} < m$.

Rozważmy teraz zagadnienie

$$\begin{cases} -\Delta_{S^n} u = \mu u & \text{w } B(\alpha), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial B(\alpha). \end{cases} \tag{1.15}$$

Oznaczmy przez $\sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$ zbiór wszystkich wartości własnych problemu (1.15), zaś przez $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$ podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej μ_m oraz połóżmy

$$\sigma_N^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) = \{-\mu\colon \mu \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\}.$$

W poniższym twierdzeniu zbieramy podstawowe własności zbioru $\sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$.

Twierdzenie 1.5.16. *Przy powyższych założeniach:*

(1) $\sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\} \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem przeliczalnym, jedynym punktem skupienia tego zbioru jest* ∞,

(2) *dla dowolnego* $\mu_i \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$ *podprzestrzeń* $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_i) \subset V$ *jest skończenie wymiarowa,*

(3) *podprzestrzeń* $V_{-\Delta}(0)$ *składa się jedynie z funkcji stałych i jest izomorficzna z* $\mathbb{R}$,

(4) $H^1(B(\alpha)) = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))} V_{-\Delta_{S^n}(\mu_i)}}$,

(5) połóżmy $V = \bigoplus_{j=1}^{p} H^1(B(\alpha))$*, wówczas* $V = \overline{\bigoplus_{\mu_i \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))} \bigoplus_{j=1}^{p} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_i)}$.

Niech (t, θ) będą współrzędnymi biegunowymi na S^n, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Podobnie jak wcześniej, pokazuje się, że wektory własne w zagadnieniu (1.15) są postaci $u(t, \theta) = T_l(t) v_l(\theta)$, gdzie $v_l(\theta)$ jest harmoniką sferyczną stopnia l $(l = 0, 1, \ldots)$ oraz

$$T_l(t) = (\sin t)^l F\left(1 + \eta + \xi, \eta - \xi, 1 + \eta, \sin^2 \frac{t}{2}\right) = \frac{(\sin t)^l}{(\cos \frac{t}{2})^{n+2l-2}} F\left(-\xi, 1 + \xi, 1 + \eta, \sin^2 \frac{t}{2}\right)$$

dla $t < \pi$ oraz

$$T_l(t) = F\left(\frac{1 + \eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}, 1 + \eta, \sin^2 t\right) = (\sin t)^l (\cos t) F\left(\frac{1 + \eta - \xi}{2}, \frac{2 + \eta + \xi}{2}, 1 + \eta, \sin^2 t\right)$$

dla $t < \frac{\pi}{2}$.

Oznaczmy przez B_l zbiór wszystkich dodatnich μ takich, że $\frac{\partial}{\partial \nu} T_l(t) = 0$. Z ogólnych własności wartości własnych zbiory B_l są przeliczalne oraz zbiór wartości własnych problemu (1.15) jest sumą zbiorów B_l $(l = 0, 1, \ldots)$.

Dowód poniższego twierdzenia można znaleźć w pracy [5].

Twierdzenie 1.5.17. *Przy powyższych założeniach*

$$\sigma_N\left(-\Delta_{S^n}; B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \{\mu_m = m(n + m - 1) \colon m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

oraz

$$V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m) = \bigoplus_{l \colon l = m \vee \exists_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} m = 2p + l + 2} \mathcal{H}_l^n.$$

Co więcej, μ_m *jest krotności* $\binom{n+m-1}{n-1}$ *dla każdego* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Z powyższego twierdzenia natychmiast wynika następujący wniosek:

Wniosek 1.5.18. *Ustalmy* $\mu_m \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\frac{\pi}{2}))$.

1. *Jeżeli* m *jest liczbą parzystą, to* $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m) = \mathcal{H}_0^n \oplus \mathcal{H}_2^n \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_m^n$.
2. *Jeżeli* m *jest liczbą nieparzystą, to* $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m) = \mathcal{H}_1^n \oplus \mathcal{H}_3^n \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_m^n$.

W konsekwencji, $\mathcal{H}_m^n \subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$ *oraz* $\mathcal{H}_m^n \not\subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{\tilde{m}})$ *dla każdego* $0 < \tilde{m} < m$.

Rozdział 2

Łamanie symetrii w niekooperatywnym układzie równań eliptycznych

Rozważmy następujący problem łamania symetrii: czy istnieje funkcja radialna $h \in L^p(B^n)$ taka, że równanie

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) + h & \text{w } B^n, \\ w = 0 & \text{na } S^{n-1} \end{cases} \tag{2.1}$$

posiada słabe rozwiązanie nieradialne, przy czym $f \in C^1(\mathbb{R})$?

W pracy [14] Dancer uzyskał następujący rezultat:

Twierdzenie 2.1. *Połóżmy $m = \inf\{f'(y) \colon y \in \mathbb{R}\}$ i $M = \sup\{f'(y) \colon y \in \mathbb{R}\}$. Niech ponadto $\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2 < \dots$ będą wszystkimi różnymi wartościami własnymi równania*

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & w\ B^n, \\ w = 0 & na\ S^{n-1}, \end{cases}$$

dla których istnieje nieradialna funkcja własna oraz $\tilde{\mu}_0 = -\infty$.

1. *Jeżeli istnieje $i \geqslant 0$ takie, że $\tilde{\mu}_i < m \leqslant M < \tilde{\mu}_{i+1}$, to dla dowolnej funkcji radialnej $h \in L^p(B^n)$ wszystkie słabe rozwiązania równania (2.1) są radialne.*

2. *Jeżeli istnieje $i \geqslant 1$ takie, że $m < \tilde{\mu}_i < M$, to istnieje ciąg radialnych funkcji ciągłych $h_n \in C(B^n)$, dla których (2.1) posiada słabe rozwiązanie nieradialne.*

W pracy [14] problem łamania symetrii został zamieniony na zagadnienie bifurkacyjne, a następnie, korzystając z indeksu homotopijnego Rybakowskiego, vide [49], w punkcie (ii) powyższego twierdzenia uzyskano punkt bifurkacji lokalnej rozwiązań zagadnienia bifurkacyjnego, a zatem również problemu łamania symetrii.

W tym rozdziale zastosujemy do zagadnienia (2.1) stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych i podamy warunki gwarantujące istnienie globalnego punktu bifurkacji rozwiązań problemu łamania symetrii, uogólniając tym samym rezultat z pracy [14]. Korzystając z tego stopnia, uogólnimy również ten rezultat na przypadek niekooperatywnego układu równań eliptycznych, to znaczy sformułujemy warunki wystarczające zachodzenia globalnej bifurkacji rozwiązań problemu łamania symetrii w tym układzie. Wyniki z tego rozdziału zostały opublikowane w pracy [61].

2.1 Abstrakcyjne sformułowanie problemu

Niech G oznacza zwartą grupę Liego oraz $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}})$ ośrodkową przestrzeń Hilberta, która jest ortogonalną reprezentacją grupy G. Ustalmy $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$ i przypomnijmy, że $\mathbb{V}^G \subset \mathbb{V}^H$. W tym rozdziale będziemy się zajmować następującym problemem:

Problem 2.1.1. Niech $\Psi \in C^0_G(\mathbb{V},\mathbb{V})$. Czy istnieje $w \in \mathbb{V}^H \backslash \mathbb{V}^G$ takie, że $\Psi(w) \in \mathbb{V}^G$?

Przypomnijmy, że dla odwzorowania $\Psi \in C^0_G(\mathbb{V},\mathbb{V})$ i $v \in \mathbb{V}$ zachodzi inkluzja $G_v \subset G_{\Psi(v)}$, co oznacza, że powyższy problem sprowadza się do poszukiwania $v \in \mathbb{V}$ takich, że $G_v \subsetneq G_{\Psi(v)} = G$.

Rozważmy G-współzmienniczy rzut $\pi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ taki, że $\operatorname{im}\pi = (\mathbb{V}^G)^\perp$. Wówczas $\operatorname{im}(\mathrm{Id}-\pi) = \mathbb{V}^G$. Zauważmy, że $\pi\colon (\mathbb{V}\ominus\mathbb{V}^H)\oplus(\mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G)\oplus\mathbb{V}^G \to (\mathbb{V}\ominus\mathbb{V}^H)\oplus(\mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G)\oplus\mathbb{V}^G$ możemy zadać wzorem $\pi(x,y,z) = (x,y,0)$ oraz $\pi(\mathbb{V}^H) \subset \mathbb{V}^H$. Zdefiniujmy $i\colon \mathbb{V}^H \to (\mathbb{V}\ominus\mathbb{V}^H)\oplus\mathbb{V}^H$, $j\colon (\mathbb{V}\ominus\mathbb{V}^H)\oplus(\mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G)\oplus\mathbb{V}^G \to \mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G$ wzorami $i(x) = (0,x)$, $j(x,y,z) = y$ oraz określmy odwzorowanie $\pi_1\colon \mathbb{V}^H \to \mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G$ wzorem $\pi_1 = j\circ\pi\circ i$. Odwzorowania i oraz j są $N(H)$-współzmiennicze (zgodnie z twierdzeniem 1.2.1, przestrzeń $\mathbb{V}^H$ jest $N(H)$-niezmiennicza, w ogólności nie musi być G-niezmiennicza), zatem π_1 również jest $N(H)$-współzmienniczym odwzorowaniem. Zauważmy, że

$$\pi_1(y,z) = j(\pi(i(y,z))) = j(\pi(0,y,z)) = j(0,y,0) = y.$$

Oczywiście $\operatorname{im}\pi_1 = \mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G$.

W dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenie $\Lambda = \mathbb{V}^G$. Oczywiście $\mathbb{V}^H = \operatorname{im}\pi_1 \oplus \Lambda$.

Problem 2.1.2. Ustalmy $\Psi \in C^0_G(\mathbb{V},\mathbb{V})$. Czy istnieją $\lambda \in \Lambda$ oraz $u \in \operatorname{im}\pi_1\backslash\{0\}$ takie, że $(\pi_1\circ\Psi\circ i)(u,\lambda) = 0$?

W poniższym lemacie pokażemy, że problem 2.1.1 jest równoważny z problemem 2.1.2.

Lemat 2.1.1. *Przyjmijmy powyższe założenia. Wówczas problem 2.1.1 jest równoważny z problemem 2.1.2.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że z problemu 2.1.1 wynika problem 2.1.2. Niech $w \in \mathbb{V}^H\backslash\mathbb{V}^G$ będzie takie, że $\Psi(w) \in \mathbb{V}^G$. Wiemy, że $w = i(u,\lambda) \in \operatorname{im}\pi_1 \oplus \mathbb{V}^G$ oraz z założenia $(u,\lambda) \neq (0,\lambda)$. Z G-współzmienniczości odwzorowania π otrzymujemy, że dla $g \in G$

$$g\pi_1(\Psi(w)) = g\pi(\Psi(w)) = \pi(g\Psi(w)) = \pi(\Psi(w)) = \pi_1(\Psi(w)),$$

zatem $\pi_1(\Psi(w)) \in \mathbb{V}^G$. Z równości $\operatorname{im}\pi_1 = \mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G$ otrzymujemy, że $(\pi_1\circ\Psi\circ i)(u,\lambda) = 0$.

Pokażemy teraz, że problem 2.1.2 implikuje problem 2.1.1. Załóżmy, że istnieją $\lambda\in\Lambda$ i $u \in \operatorname{im}\pi_1\backslash\{0\}$ takie, że $(\pi_1\circ\Psi\circ i)(u,\lambda) = 0$. Połóżmy $w = i(u,\lambda)$. Wówczas $w \in \mathbb{V}^H\backslash\mathbb{V}^G$, gdyż z założenia $(u,\lambda) \neq (0,\lambda)$. To kończy dowód, ponieważ $\ker\pi_1 = \mathbb{V}^G$ oraz $\Psi(w) \in \ker\pi_1$. □

Zdefiniujmy operator $\mathcal{A} \in C^0_{N(H)}(\operatorname{im}\pi_1 \oplus \Lambda, \operatorname{im}\pi_1)$ wzorem $\mathcal{A}(u,\lambda) = \pi_1(\Psi(i(u,\lambda)))$.

Lemat 2.1.2. *Operator $\mathcal{A}$ jest dobrze określony.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\operatorname{im}\pi_1 = \mathbb{V}^H \ominus \mathbb{V}^G = \{v \in \mathbb{V}^H : \forall_{w\in\mathbb{V}^G}\ \langle v, w\rangle_{\mathbb{V}} = 0\}$ jest $N(H)$-przestrzenią. Ustalmy $g \in N(H)$, $v \in \operatorname{im}\pi_1$. Pokażemy, że $gv \in \operatorname{im}\pi_1$. Rzeczywiście, dla dowolnego $w \in \mathbb{V}^G$ mamy $\langle gv, w\rangle_{\mathbb{V}} = \langle gv, gg^{-1}w\rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, g^{-1}w\rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, w\rangle_{\mathbb{V}} = 0$. Zauważmy, że $\Psi(i(u,\lambda)) \in \mathbb{V}^H$, ponieważ $h\Psi(i(u,\lambda)) = \Psi(i(hu, h\lambda)) = \Psi(i(u,\lambda))$. Zatem $\Psi \circ i(\mathbb{V}^H) \subset \mathbb{V}^H$, czyli odwzorowanie $\mathcal{A}$ jest dobrze określone. Zauważmy ponadto, że odwzorowanie $\mathcal{A}$ jest $N(H)$-współzmiennicze jako złożenie $N(H)$-współzmienniczych odwzorowań.

□

Ponieważ z definicji odwzorowania π_1 wynika, że $\mathcal{A}(0,\lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$, prawdziwy jest następujący fakt:

Fakt 2.1.3. *Jeżeli istnieje punkt bifurkacji rozwiązań równania $\mathcal{A}(u,\lambda) = 0$, to odpowiedź na problem 2.1.1 jest pozytywna.*

Dowód. Powyższy fakt wynika z równoważności problemu 2.1.1 i 2.1.2 oraz definicji punktu bifurkacji. □

Przyjmijmy teraz następujące założenia:

(1) $\Phi \in C^2_G(\mathbb{V})$,

(2) $\Phi(w) = \frac{1}{2}\langle Lw, w\rangle_{\mathbb{V}} - \eta(w)$,

(3) $L\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest liniowym, ograniczonym, samosprzężonym, G-współzmienniczym operatorem Fredholma indeksu 0,

(4) $\nabla\eta \in C^1_G(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ jest operatorem pełnociągłym.

Połóżmy $\Psi = \nabla\Phi$ oraz zauważmy, że $\mathcal{A}(u,\lambda) = \pi_1(L(i(u,\lambda))) - \pi_1(\nabla\eta(i(u,\lambda)))$.

Ponieważ operator L jest G-współzmienniczy, $L(\mathbb{V}^G) \subset \mathbb{V}^G$ oraz $L(\mathbb{V}^H) \subset \mathbb{V}^H$. Zatem z samosprzężoności wynika, że operator L jest postaci

$$L\colon \begin{array}{c} \mathbb{V}\ominus\mathbb{V}^H \\ \oplus \\ \mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G \\ \oplus \\ \mathbb{V}^G \end{array} \to \begin{array}{c} \mathbb{V}\ominus\mathbb{V}^H \\ \oplus \\ \mathbb{V}^H\ominus\mathbb{V}^G \\ \oplus \\ \mathbb{V}^G \end{array}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\pi_1(L(i(u,\lambda))) = \pi_1(L(0,u,\lambda)) = \pi_1(0, L_2u, L_3\lambda) = L_2u$ i $\mathcal{A}(u,\lambda) = L_2u - \pi_1(\nabla\eta(i(u,\lambda)))$.

Szkic dowodu poniższego lematu został podany w pracy [14], dla kompletności rozważań podajemy pełny dowód.

Lemat 2.1.4. *Dla każdego $\lambda \in \Lambda$ operator $\mathcal{A}(\cdot,\lambda) \in C^1_{N(H)}(\operatorname{im}\pi_1, \operatorname{im}\pi_1)$ jest operatorem gradientowym.*

Dowód. Ustalmy dowolne $\lambda \in \Lambda$ oraz zdefiniujmy funkcjonał $\widetilde{\Phi} \in C^2_{N(H)}(\operatorname{im}\pi_1)$ wzorem

$$\widetilde{\Phi}(u) = \Phi(u,\lambda) = \frac{1}{2}\langle L_2 u, u\rangle_{\mathbb{V}} + \frac{1}{2}\langle L_3\lambda, \lambda\rangle_{\mathbb{V}} - \eta(i(u,\lambda)).$$

Pokażemy, że $\nabla\widetilde{\Phi}(u) = \mathcal{A}(u,\lambda)$. Rzeczywiście, dla $u, v \in \operatorname{im}\pi_1$ mamy

$$\begin{aligned} D\widetilde{\Phi}(u)(v) &= \langle \nabla\widetilde{\Phi}(u), v\rangle_{\mathbb{V}} = \langle L_2 u - \nabla_u\left(\eta \circ i(u,\lambda)\right), v\rangle_{\mathbb{V}} \\ &= \langle L_2 u - \pi_1(\nabla_u \eta(i(u,\lambda)), v\rangle_{\mathbb{V}} = \langle \mathcal{A}(u,\lambda), v\rangle_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z lematu 1.1.2 oraz $\pi_1(\nabla_u\eta(i(u,\lambda)) = \nabla\eta(i(u,\lambda))$, bo $\eta(i(\cdot,\lambda))\colon \operatorname{im}\pi_1 \to \mathbb{R}$, czyli $\nabla_u\eta(i(\cdot,\lambda))\colon \operatorname{im}\pi_1 \to \operatorname{im}\pi_1$. □

Z powyższego lematu wynika, że równanie $\mathcal{A}(u,\lambda) = 0$ ma strukturę gradientową i wariacyjną. Do badania bifurkacji rozwiązań tego równania zastosujemy stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów $N(H)$-niezmienniczych, w szczególności twierdzenie 1.4.6, które w tej sytuacji można zapisać następująco:

Twierdzenie 2.1.5. *Jeżeli istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ oraz $\gamma > 0$ takie, że*

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg(\mathcal{A}(\cdot,\lambda_1), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)) \neq \nabla_{N(H)}\text{-}\deg(\mathcal{A}(\cdot,\lambda_2), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)),$$

to istnieje punkt bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\mathcal{A}(u,\lambda) = 0$.

W dalszym ciągu tego rozdziału podamy wzory na stopień odwzorowania $\mathcal{A}(\cdot,\lambda)$ w przypadku równania i układu równań eliptycznych oraz wykorzystamy powyższe twierdzenie do sformułowania twierdzeń bifurkacyjnych odpowiadających na problem łamania symetrii.

2.2 Zagadnienie łamania symetrii w równaniu eliptycznym

Rozważmy równanie

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) & \text{w } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

gdzie Ω jest otwartym, ograniczonym i G-niezmienniczym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem oraz $f \in C^1(\mathbb{R})$. Połóżmy $\mathbb{V} = H^1(\Omega)$. Słabym rozwiązaniem tego równania nazywamy funkcję $w \in \mathbb{V}$ taką, że

$$\forall_{v\in\mathbb{V}} \int_\Omega \langle \nabla w(x), \nabla v(x)\rangle - f(w(x))\cdot v(x)dx = 0.$$

Zdefiniujmy $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $F(w) = \int\limits_0^w f(s)ds$ oraz połóżmy w podrozdziale 2.1

$$\Phi(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w(x)|^2 - F(w(x))dx, \tag{2.3}$$

przy czym $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że $|f'(y)| \leqslant a + b|y|^q$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $q < \frac{4}{n-2}$ dla $n \geqslant 3$ i $q < \infty$ dla $n = 2$.

Z definicji funkcjonału Φ wynika:

Fakt 2.2.1. *Przyjmijmy powyższe założenia.*

1. *Funkcjonał Φ jest poprawnie określony.*
2. $\Phi \in C^2_G(\mathbb{V})$.
3. *Dla dowolnego $w \in \mathbb{V}$*

$$\Phi(w) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla w(x)|^2 + \frac{1}{2}|w(x)|^2 dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}|w(x)|^2 + F(w(x))\, dx = \frac{1}{2}\langle w, w\rangle_{\mathbb{V}} - \eta(w),$$

gdzie

$$\eta(w) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}|w_1(x)|^2 + F(w(x))\, dx$$

oraz

$$\langle \nabla\eta(w), v\rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} w(x)\cdot v(x) + f(w(x))\cdot v(x)\, dx.$$

Zatem $\nabla\Phi(w) = w - \nabla\eta(w)$ oraz $\nabla\eta$ jest operatorem pełnociągłym (czyli również zwartym). Ponadto $\nabla^2\Phi(w) = \mathrm{Id} - C_{f'(w)}$ dla $w \in \mathbb{V}$, przy czym operator $C_{f'(w)} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest zadany przez równość

$$\left\langle C_{f'(w)}u, v\right\rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} \left\langle (1 + f'(w(x)))\, u(x), v(x)\right\rangle dx \ \ dla\ u, v \in \mathbb{V}.$$

Niech $z \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy

$$\left\langle C_{f'(z)}u, v\right\rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} \left\langle (1 + f'(z))\, u(x), v(x)\right\rangle dx \ \ dla\ u, v \in \mathbb{V}$$

oraz $\nabla^2\Phi(z) = \mathrm{Id} - C_{f'(z)}$.

4. *Funkcja $w \in \mathbb{V}$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (2.2) wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla\Phi(w) = 0$, to znaczy w jest punktem krytycznym funkcjonału Φ.*

Ustalmy $H \in \overline{\mathrm{sub}}(G)$. W dalszym ciągu tego podrozdziału będziemy badać zagadnienie łamania symetrii rozwiązań funkcjonału Φ zdefiniowanego powyżej. Z tym zagadnieniem jest związane równanie

$$\begin{cases} -\Delta w &= f(w) + h \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \qquad\qquad\ \text{na} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

i następujący problem

Problem 2.2.1. Czy istnieje funkcja $h \in \mathbb{V}^G$ taka, że równanie (2.4) posiada słabe rozwiązanie $w \in \mathbb{V}^H \backslash \mathbb{V}^G$, to znaczy taka, że $\nabla\Phi(w) = h$?

Przypomnijmy, że w podrozdziale 2.1 zdefiniowaliśmy $N(H)$-współzmienniczy rzut ortogonalny $\pi_1 \colon \mathbb{V}^H \to \mathbb{V}^H$ taki, że $\operatorname{im} \pi_1 = \mathbb{V}^H \ominus \mathbb{V}^G$. Oznaczmy $\Lambda = \mathbb{V}^G$ oraz połóżmy $L = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Wówczas odwzorowanie $\mathcal{A} \in C^1_{N(H)}(\operatorname{im} \pi_1 \oplus \Lambda, \operatorname{im} \pi_1)$ jest zadane wzorem

$$\mathcal{A}(u, \lambda) = \pi_1(\nabla\Phi(i(u, \lambda))) = u - \pi_1(\nabla\eta(i(u, \lambda))),$$

gdzie i jest włożeniem $\mathbb{V}^H$ w $(\mathbb{V}^H)^\perp \oplus \mathbb{V}^H$ zdefiniowanym wzorem $i(x) = (0, x)$. Z lematu 2.1.4 wiemy, że operator $\mathcal{A}(\cdot, \lambda) \in C^1_{N(H)}(\operatorname{im} \pi_1, \operatorname{im} \pi_1)$ jest gradientowy dla każdego $\lambda \in \Lambda$.

Przypomnijmy, że przez $\sigma(-\Delta; \Omega) = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\}$ oznaczamy spektrum operatora Laplace'a na zbiorze Ω, zaś przez $V_{-\Delta}(\mu_{k_0})$ podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej μ_{k_0}. Zdefiniujmy

(1) $\mathbb{V}^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}_k = V_{-\Delta}(\mu_k)$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(3) $\mathbb{V}^N = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} \mathbb{V}_{k-1}$ dla $N \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $\lambda \in \Lambda$. Obliczymy stopień $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg(\mathcal{A}(\cdot, \lambda), B_\gamma(\operatorname{im} \pi_1))$, będący elementem pierścienia Eulera $U(N(H))$. W tym celu zdefiniujemy schemat aproksymacyjny na przestrzeni $\operatorname{im} \pi_1$. Rozważmy ciąg $N(H)$-współzmienniczych rzutów ortogonalnych $\Gamma = \{\tau_N \colon \operatorname{im} \pi_1 \to \operatorname{im} \pi_1 \colon N \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ zdefiniowany następująco

(1) $\mathbb{V}'^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}'_k = V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(3) $\mathbb{V}'^N = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} \mathbb{V}'_{k-1}$ dla $N \in \mathbb{N}$,

(4) τ_N jest rzutowaniem takim, że $\operatorname{im} \tau_N = \mathbb{V}'^N$ dla $N \in \mathbb{N}$.

Z definicji Γ oraz z własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a wynika, że jest to $N(H)$-niezmienniczy schemat aproksymacyjny na przestrzeni $\operatorname{im} \pi_1 = \mathbb{V}^H \ominus \mathbb{V}^G$. Co więcej, $\ker L = \mathbb{V}'^0$ i dla każdego $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi $\tau_N \circ L = L \circ \tau_N$. Zauważmy, że $\pi_1(\mathbb{V}^N) = \mathbb{V}'^N$.

Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} -\Delta w = aw & \text{w } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

i zauważmy, że funkcjonał Φ odpowiadający temu równaniu jest następującej postaci

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 - aw(x) \cdot w(x) dx.$$

Z postaci równania oraz własności funkcjonału Φ wynika, że $\nabla\Phi(w) = Lw - C_a w$, gdzie $\langle C_a w, v\rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} (1 + a)w(x) \cdot v(x) dx$ dla $w, v \in \mathbb{V}$.

Lemat 2.2.2. *Dla dowolnych $w \in \mathbb{V}_k$, $v \in \mathbb{V}$ zachodzi $\langle C_a w, v\rangle_{\mathbb{V}} = \langle \frac{1+a}{1+\mu_k} w, v\rangle_{\mathbb{V}}$.*

Dowód. Mamy

$$\langle (1+a)w, v\rangle_{\mathbb{V}} = \int_\Omega \langle \nabla(1+a)w(x), \nabla v(x)\rangle dx + \int_\Omega (1+a)w(x)\cdot v(x)dx$$

i dalej, korzystając ze wzoru (1.2), otrzymujemy

$$\int_\Omega \langle \nabla(1+a)w(x), \nabla v(x)\rangle dx = \int_\Omega (-\Delta)((1+a)w(x))\cdot v(x)dx = \mu_k \int_\Omega ((1+a)w(x))\cdot v(x)dx.$$

Stąd

$$\langle (1+a)w, v\rangle_{\mathbb{V}} = (1+\mu_k)\int_\Omega ((1+a)w(x))\cdot v(x)dx = (1+\mu_k)\langle C_a w, v\rangle_{\mathbb{V}}.$$

Zatem $\langle C_a w, v\rangle_{\mathbb{V}} = \langle \frac{1+a}{1+\mu_k} w, v\rangle_{\mathbb{V}}$. □

Z powyższego lematu wynika, że $C_a(\mathbb{V}_k) \subset \mathbb{V}_k$, a zatem $C_a\colon \mathbb{V}_k \to \mathbb{V}_k$. Uwzględniając powyższy lemat, możemy opisać działanie operatora $\nabla\Phi$ na podreprezentacjach $\mathbb{V}$. Oznaczmy $\alpha_k = 1 - \frac{1+a}{1+\mu_k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, wówczas $(\nabla\Phi)_{|\mathbb{V}_k} = \alpha_k \operatorname{Id}_{|\mathbb{V}_k}$.

Opiszemy teraz działanie operatora $\mathcal{A}(\cdot,\lambda)$ na podreprezentacjach $\operatorname{im}\pi_1$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i $\lambda \in V_{-\Delta}(\mu_k)^G$ oraz załóżmy, że $\dim \mathbb{V}'_k > 0$. Wówczas dla $u \in \mathbb{V}'_k$ mamy

$$\mathcal{A}(u,\lambda) = \pi_1\left(\nabla\Phi_{|\mathbb{V}_k}(i(u,\lambda))\right) = \pi_1\left(\nabla\Phi_{|\mathbb{V}_k}(0,u,\lambda)\right) = \pi_1\left(\alpha_k \operatorname{Id}(0,u,\lambda)\right) = \alpha_k u.$$

Zatem $(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda)) = \alpha_k \operatorname{Id}_{|\mathbb{V}'_k}$.

Ponieważ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\alpha_k = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \mu_k$, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2.3. $\nabla\Phi$ *jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $a \neq \mu_k$. *Ustalmy* $\lambda \in \Lambda$. $\mathcal{A}(\cdot,\lambda)$ *jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *takiego, że* $\dim \mathbb{V}'_k > 0$, $a \neq \mu_k$.

W poniższym twierdzeniu wyznaczamy formułę na stopień izomorfizmu w przypadku równania (2.5).

Twierdzenie 2.2.4. *Rozważmy równanie* (2.5) *spełniające warunek: dla dowolnego* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *takiego, że* $\dim \mathbb{V}'_k > 0$, $a \neq \mu_k$ *oraz ustalmy* $\lambda \in \Lambda$. *Wówczas*

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot,\lambda), B(\operatorname{im}\pi_1)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu_k<a} \mathbb{V}'_k\right)\right).$$

Dowód. Z definicji stopnia wiemy, że dla odpowiednio dużych N zachodzi równość

$$\begin{aligned}
&\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot,\lambda), B(\operatorname{im}\pi_1)\right)\\
&= \left(\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\operatorname{Id}, B\left(\mathbb{V}'^N \ominus \mathbb{V}'^0\right)\right)\right)^{-1} \star \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'^N}(\cdot,\lambda), B\left(\mathbb{V}'^N\right)\right)\\
&= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'^N}(\cdot,\lambda), B\left(\mathbb{V}'^N\right)\right) = \prod_{k=0}^{N-1} \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\left(1 - \frac{1+a}{1+\mu_k}\right)\operatorname{Id}, B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right).
\end{aligned}$$

Niech $\mu_k \in \sigma(-\Delta;\Omega)$ będzie takie, że $\dim \mathbb{V}'_k > 0$. Zauważmy, że jeżeli $\mu_k < a$, to homotopia $h(u,t) = t((1-\frac{1+a}{1+\mu_k}))u + (1-t)(-u)$ jest $B(\mathbb{V}'_k)$-dopuszczalna, zatem

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\left(1-\frac{1+a}{1+\mu_k}\right)\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right),$$

natomiast jeżeli $\mu_k > a$, to homotopia $h(u,t) = t((1-\frac{1+a}{1+\mu_k}))u + (1-t)u$ jest $B(\mathbb{V}'_k)$-dopuszczalna, zatem

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\left(1-\frac{1+a}{1+\mu_k}\right)\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right) = \mathbb{I} \in U\left(N(H)\right).$$

Uwzględniając powyższe równości, otrzymujemy tezę.

$\square$

Od tej pory będziemy rozważać zagadnienie

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) & \text{w } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

przy czym zbiór Ω i funkcja f spełniają wcześniejsze założenia. Przypomnijmy, że z tym zagadnieniem związany jest funkcjonał $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ dany wzorem (2.3). Ustalmy $z \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i oznaczmy $\alpha_k(z) = 1 - \frac{1+f'(z)}{1+\mu_k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wówczas $(\nabla^2\Phi(z))_{|\mathbb{V}_k} = \alpha_k(z)\,\mathrm{Id}_{|\mathbb{V}_k}$. Zdefiniujmy $\lambda_z \in \mathbb{V}^G$ wzorem $\lambda_z(x) = z$ dla każdego $x \in \Omega$. Ponieważ pochodna $\mathcal{A}$ względem u spełnia $\mathcal{A}'_u(0,\lambda) = \pi_1 \circ \nabla^2\Phi(0,0,\lambda) \circ i$, jeżeli $\dim \mathbb{V}'_k > 0$, to $((\mathcal{A}'_u)_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda)) = \alpha_k(z)\,\mathrm{Id}_{|\mathbb{V}'_k}$.

Twierdzenie 2.2.5. *Niech $z \in \mathbb{R}$ spełnia warunek: dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takiego, że $\dim \mathbb{V}'_k > 0$, $f'(z) \neq \mu_k$. Wówczas istnieje $\gamma_0 > 0$ taka, że dla każdego $0 < \gamma < \gamma_0$ mamy*

$$\begin{aligned} \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot,\lambda_z\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}'_u\left(0,\lambda_z\right), B\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu_k < f'(z)} \mathbb{V}'_k\right)\right). \end{aligned}$$

Dowód. Pierwsza równość wynika z własności linearyzacji dla stopnia z twierdzenia 1.4.5, druga z twierdzenia 2.2.4. $\square$

Niech $m = \inf\{f'(z)\colon z \in \mathbb{R}\}$ i $M = \sup\{f'(z)\colon z \in \mathbb{R}\}$. Sformułujemy teraz i udowodnimy twierdzenie uogólniające podpunkt (ii) twierdzenia 2.1.

Twierdzenie 2.2.6. *Jeżeli istnieje $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takie, że $m < \mu_i < M$ oraz przestrzeń $\mathbb{V}'_i$ jest nieparzystego wymiaru lub jest nietrywialną $N(H)$-reprezentacją, to istnieje spójny zbiór w $\mathbb{V}^H \setminus \mathbb{V}^G$ taki, że dla każdego elementu tego zbioru istnieje funkcja $h \in \mathbb{V}^G$ taka, że te punkty są rozwiązaniami układu*

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) + h & w\ \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & na\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Dowód. Z założeń wynika, że istnieją z_1, z_2 takie, że $f'(z_1), f'(z_2) \neq \mu_j$ dla każdego $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $f'(z_1) < \mu_i < f'(z_2)$, zatem operatory $\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_1}), \mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_2})$ są odwracalne. Ponadto dla dostatecznie małego $\gamma > 0$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_1}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}'_u\left(0, \lambda_{z_1}\right), B\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu_k < f'(z_1)} \mathbb{V}'_k\right)\right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}'_u\left(0, \lambda_{z_2}\right), B\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu_k < f'(z_2)} \mathbb{V}'_k\right)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu_k < f'(z_1)} \mathbb{V}'_k\right)\right) \star \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{f'(z_1) < \mu_k < f'(z_2)} \mathbb{V}'_k\right)\right), \end{aligned}$$

zgodnie z twierdzeniem 2.2.5. Z założenia wynika, że

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{f'(z_1) < \mu_k < f'(z_2)} \mathbb{V}'_k\right)\right) \neq \mathbb{I} \in U\left(N(H)\right),$$

stąd

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) \neq \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right).$$

Zatem teza wynika z twierdzenia 2.1.5 oraz z definicji operatora $\mathcal{A}$. □

2.3 Układ równań eliptycznych

W tym podrozdziale zajmiemy się niekooperatywnym układem równań eliptycznych z warunkiem brzegowym Neumanna. Przedstawimy własności tego układu potrzebne do zbadania zagadnienia łamania symetrii, przedstawionego w następnym podrozdziale. Rozważmy

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \nabla_{w_1} F(w_1, w_2) & \text{w } \Omega, \\ \Delta w_2 = \nabla_{w_2} F(w_1, w_2) & \text{w } \Omega, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

gdzie

(a1) Ω jest otwartym, ograniczonym, G-niezmienniczym podzbiorem ortogonalnej G-reprezentacji $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem,

(a2) $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$,

(a3) $||\nabla^2 F(y)|| \leqslant a + b||y||^q$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $q < \frac{4}{n-2}$ dla $n \geqslant 3$ i $q < \infty$ dla $n = 2$.

Połóżmy w podrozdziale 2.1 $\mathbb{V} = H^1(\Omega) \oplus H^1(\Omega)$. Przypomnijmy, że ponieważ przestrzeń $H^1(\Omega)$ jest ortogonalną G-reprezentacją, to przestrzeń $\mathbb{V}$ również jest ortogonalną G-reprezentacją, zgodnie z lematem 1.2.2. Połóżmy $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Dla skrócenia zapisu stosujemy to samo oznaczenie dla macierzy oraz operatora $H^1(\Omega) \oplus H^1(\Omega) \to H^1(\Omega) \oplus H^1(\Omega)$ indukowanego przez tę macierz.

Słabym rozwiązaniem układu (2.7) nazywamy odwzorowanie $w \in \mathbb{V}$ takie, że

$$\forall_{v\in\mathbb{V}} \int\limits_\Omega \langle L\nabla w(x), \nabla v(x)\rangle - \langle \nabla F(w(x)), v(x)\rangle dx = 0.$$

Połóżmy w podrozdziale 2.1

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla w_1(x)|^2 - |\nabla w_2(x)|^2 dx - \int\limits_\Omega F(w(x))dx. \tag{2.8}$$

Z definicji funkcjonału $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ wynika następujący fakt:

Fakt 2.3.1. *Przyjmijmy powyższe założenia.*

1. *Funkcjonał Φ jest poprawnie określony.*
2. *$\Phi \in C^2_G(\mathbb{V})$.*
3. *Dla dowolnego $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{V}$*

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla w_1(x)|^2 - |\nabla w_2(x)|^2 + |w_1(x)|^2 - |w_2(x)|^2 dx \\ &- \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|w_1(x)|^2 - \frac{1}{2}|w_2(x)|^2 + F(w(x))dx \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \langle \nabla(Lw(x)), \nabla w(x)\rangle + \langle Lw(x), w(x)\rangle\, dx - \eta(w) = \frac{1}{2}\langle Lw, w\rangle - \eta(w),\end{aligned}$$

gdzie

$$\eta(w) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|w_1(x)|^2 - \frac{1}{2}|w_2(x)|^2 + F(w(x))dx$$

oraz

$$\langle \nabla\eta(w), v\rangle = \int\limits_\Omega \langle Lw(x), v(x)\rangle + \langle \nabla F(w(x)), v(x)\rangle\, dx.$$

Zatem $\nabla\Phi(w) = Lw - \nabla\eta(w)$ oraz $\nabla\eta$ jest operatorem pełnociągłym (czyli również zwartym). Ponadto $\nabla^2\Phi(w) = L - C_{\nabla^2 F(w)}$ dla $w \in \mathbb{V}$, gdzie operator $C_{\nabla^2 F(w)}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest zadany przez równość

$$\left\langle C_{\nabla^2 F(w)} u, v\right\rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_\Omega \left\langle \left(L + \nabla^2 F(w(x))\right) u(x), v(x)\right\rangle dx \ \text{ dla } u, v \in \mathbb{V}.$$

Niech $z \in \mathbb{R}^2$. *Zdefiniujmy*

$$\left\langle C_{\nabla^2 F(z)} u, v \right\rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} \left\langle \left(L + \nabla^2 F(z) \right) u(x), v(x) \right\rangle dx \ \text{dla} \ u, v \in \mathbb{V}$$

oraz $\nabla^2 \Phi(z) = L - C_{\nabla^2 F(z)}$.

4. *Funkcja* $w \in \mathbb{V}$ *jest słabym rozwiązaniem układu* (2.7) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\nabla \Phi(w) = 0$, *to znaczy* w *jest punktem krytycznym* Φ.

W dalszym ciągu będziemy zajmować się zagadnieniem łamania symetrii rozwiązań układu (2.7). W tym celu ustalmy $H \in \overline{\text{sub}}(G)$ i zdefiniujmy tak jak wcześniej $N(H)$-współzmienniczy rzut $\pi_1 \colon \mathbb{V}^H \to \mathbb{V}^H$ taki, że $\operatorname{im} \pi_1 = \mathbb{V}^H \ominus \mathbb{V}^G$, połóżmy $\Lambda = \mathbb{V}^G$ oraz zdefiniujmy operator $\mathcal{A} \in C^1_{N(H)}(\operatorname{im} \pi_1 \oplus \Lambda, \operatorname{im} \pi_1)$ wzorem $\mathcal{A}(u, \lambda) = \pi_1(\nabla \Phi(i(u, \lambda)))$, gdzie i jest włożeniem $\mathbb{V}^H$ w $(\mathbb{V}^H)^\perp \oplus \mathbb{V}^H$ zdefiniowanym wzorem $i(x) = (0, x)$. Zauważmy, że

$$\mathcal{A}(u, \lambda) = \pi_1(\nabla \Phi(i(u, \lambda))) = L_2 u - \pi_1(\nabla \eta(i(u, \lambda))),$$

gdzie $L_2 = L_{|\operatorname{im} \pi_1}$. Z lematu 2.1.4 wynika, że operator $\mathcal{A}(\cdot, \lambda) \in C^1_{N(H)}(\operatorname{im} \pi_1, \operatorname{im} \pi_1)$ jest gradientowy dla każdego $\lambda \in \Lambda$.

Zdefiniujmy

(1) $\mathbb{V}^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}_k = V_{-\Delta}(\mu_k) \oplus V_{-\Delta}(\mu_k)$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(3) $\mathbb{V}^N = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} \mathbb{V}_{k-1}$ dla $N \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $\lambda \in \Lambda = \mathbb{V}^G$. Obliczymy stopień $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg(\mathcal{A}(\cdot, \lambda), B_\gamma(\operatorname{im} \pi_1))$, będący elementem pierścienia Eulera $U(N(H))$. Aby to zrobić, potrzebujemy schematu aproksymacyjnego dla odwzorowania $\mathcal{A}(\cdot, \lambda)$. Rozważmy ciąg $N(H)$-współzmienniczych rzutów ortogonalnych $\Gamma = \{\tau_N \colon \operatorname{im} \pi_1 \to \operatorname{im} \pi_1 \colon N \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ zdefiniowany następująco

(1) $\mathbb{V}'^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}'_k = (V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G) \oplus (V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G)$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(3) $\mathbb{V}'^N = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} \mathbb{V}'_{k-1}$ dla $N \in \mathbb{N}$,

(4) τ_N jest rzutowaniem takim, że $\operatorname{im} \tau_N = \mathbb{V}'^N$ dla $N \in \mathbb{N}$.

Z definicji Γ oraz z własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a wynika, że jest to $N(H)$-niezmienniczy schemat aproksymacyjny na przestrzeni $\operatorname{im} \pi_1$. Co więcej, $\ker L = \mathbb{V}'^0$ i dla każdego $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi $\tau_N \circ L = L \circ \tau_N$. Zauważmy, że $\pi_1(\mathbb{V}^N) = \mathbb{V}'^N$.

Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = a w_1 + b w_2 & \text{w } \Omega, \\ \Delta w_2 = b w_1 + c w_2 & \text{w } \Omega, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial \Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

i połóżmy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Wówczas funkcjonał Φ jest następującej postaci

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla w_1(x)|^2 - |\nabla w_2(x)|^2 - \langle Aw(x), w(x) \rangle dx.$$

Z postaci równania oraz z własności funkcjonału Φ wynika, że $\nabla\Phi(w) = Lw - C_A w$, gdzie $\langle C_A w, v \rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} \langle (L+A)w(x), v(x) \rangle dx$ dla $w, v \in \mathbb{V}$.

Lemat 2.3.2. *Dla dowolnych $w \in \mathbb{V}_k, v \in \mathbb{V}$ zachodzi $\langle C_A w, v \rangle_{\mathbb{V}} = \langle \frac{1}{1+\mu_k}(L+A)w, v \rangle_{\mathbb{V}}$.*

Dowód. Zauważmy, że $L + A = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ b & -1+c \end{bmatrix}$. Ponadto

$$\langle (L+A)\, w, v \rangle_{\mathbb{V}} = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla (L+A)\, w\,(x)\,, \nabla v\,(x) \rangle\, dx + \int\limits_{\Omega} \langle (L+A)\, w\,(x)\,, v\,(x) \rangle\, dx$$

i dalej, korzystając ze wzoru (1.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \langle \nabla (L+A)\, w\,(x)\,, \nabla v\,(x) \rangle\, dx &= \int\limits_{\Omega} \nabla ((1+a)\, w_1\,(x))\, \nabla v_1\,(x) + \nabla (bw_1\,(x))\, \nabla v_1\,(x) \\ &+ \nabla (bw_2\,(x))\, \nabla v_2\,(x) + \nabla ((-1+c)\, w_2\,(x))\, \nabla v_2\,(x)\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} (-\Delta)\, ((1+a)\, w_1\,(x))\, v_1\,(x) + (-\Delta)\, (bw_1\,(x))\, v_1\,(x) \\ &+ (-\Delta)\, (bw_2\,(x))\, v_2\,(x) + (-\Delta)\, ((-1+c)\, w_2\,(x))\, v_2\,(x)\, dx \\ &= \mu_k \int\limits_{\Omega} ((1+a)\, w_1\,(x))\, v_1\,(x) + (bw_1\,(x))\, v_1\,(x) \\ &+ (bw_2\,(x))\, v_2\,(x) + ((-1+c)\, w_2\,(x))\, v_2\,(x)\, dx \\ &= \mu_k \int\limits_{\Omega} \langle (L+A)\, w\,(x)\,, v\,(x) \rangle\, dx. \end{aligned}$$

Stąd

$$\langle (L+A)\, w, v \rangle_{\mathbb{V}} = (1+\mu_k) \int\limits_{\Omega} \langle (L+A)\, w\,(x)\, v\,(x) \rangle\, dx = (1+\mu_k)\, \langle C_A w, v \rangle_{\mathbb{V}}\,.$$

Zatem $\langle C_A w, v \rangle_{\mathbb{V}} = \langle \frac{1}{1+\mu_k}(L+A)w, v \rangle_{\mathbb{V}}$. □

Z powyższego lematu wynika, że $C_A(\mathbb{V}_k) \subset \mathbb{V}_k$, a zatem $C_A \colon \mathbb{V}_k \to \mathbb{V}_k$. Uwzględniając powyższe obliczenia, możemy opisać działanie operatora $\nabla\Phi$ na podreprezentacjach reprezentacji $\mathbb{V}$. Oznaczmy

$$T_k(A) = L - \frac{1}{1+\mu_k}\,(L+A) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1+a}{1+\mu_k} & -\frac{b}{1+\mu_k} \\ -\frac{b}{1+\mu_k} & -1 - \frac{-1+c}{1+\mu_k} \end{bmatrix}$$

oraz niech $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}$ będą wartościami własnymi macierzy $T_k(A)$, zaś $f_{1,k}, f_{2,k}$ odpowiadającymi tym wartościom wektorami własnymi. Ponieważ macierz $T_k(A)$ jest symetryczna, $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k} \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy przez ϵ_1, ϵ_2 bazę standardową przestrzeni $\mathbb{R}^2$, Przestrzeń $\mathbb{V}_k$ można zapisać w postaci $\{\varphi_1(x)\cdot\epsilon_1 + \varphi_2(x)\cdot\epsilon_2 \colon \varphi_i \in V_{-\Delta}(\mu_k)\}$. Z lematu 1.5.2 uzyskujemy

$$\{\varphi_1(x)\cdot\epsilon_1 + \varphi_2(x)\cdot\epsilon_2 \colon \varphi_i \in V_{-\Delta}(\mu_k)\} = \{\varphi_1(x)\cdot f_{1,k} + \varphi_2(x)\cdot f_{2,k} \colon \varphi_i \in V_{-\Delta}(\mu_k)\}.$$

Otrzymujemy zatem $(\nabla\Phi)_{|\mathbb{V}_k} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,k}\,\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,k}\,\mathrm{Id} \end{bmatrix}$, gdzie $\mathrm{Id}\colon V_{-\Delta}(\mu_k) \to V_{-\Delta}(\mu_k)$.

Opiszemy teraz działanie operatora $\mathcal{A}(\cdot,\lambda)$ na podreprezentacjach $\operatorname{im}\pi_1$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2) \in (V_{-\Delta}(\mu_k)^G)^2$ oraz załóżmy, że $\dim \mathbb{V}'_k > 0$. Wówczas dla $u = (u_1,u_2) \in (V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G)^2$ mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u,\lambda) &= \pi_1\left(\nabla\Phi_{|\mathbb{V}_k}(i(u,\lambda))\right) = \pi_1\left(\nabla\Phi_{|\mathbb{V}_k}(0,u,\lambda)\right) \\ &= \pi_1\left(\alpha_{1,k}\,\mathrm{Id}\,(0,u_1,\lambda_1), (\alpha_{2,k}\,\mathrm{Id}\,(0,u_2,\lambda_2))\right) = (\alpha_{1,k}u_1, \alpha_{2,k}u_2). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,k}\,\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,k}\,\mathrm{Id} \end{bmatrix}$, przy czym $\mathrm{Id}\colon V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G \to V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G$.

Zdefiniujmy $m^0(T_k(A)) = \dim\ker T_k(A)$ oraz

$$m^0\left(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda)\right) = \begin{cases} \dim\ker\left(\begin{bmatrix} \alpha_{1,k} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,k} \end{bmatrix}\right), & \text{jeśli } \dim\mathbb{V}'_k > 0, \\ 0, & \text{jeśli } \dim\mathbb{V}'_k = 0. \end{cases}$$

Połóżmy $i^0(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^0(T_k(A))$ oraz $\widetilde{i^0}(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^0(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda))$.

Z powyższego rozumowania wynika następujący fakt:

Fakt 2.3.3. $\nabla\Phi$ *jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $i^0(A) = 0$. *Ustalmy* $\lambda \in \Lambda$. $\mathcal{A}(\cdot,\lambda)$ *jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\widetilde{i^0}(A) = 0$.

Oczywiście, jeżeli $\nabla\Phi$ jest izomorfizmem, to jest nim również $\mathcal{A}(\cdot,\lambda)$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$.

Zauważmy, że $m^-(T_k(A)) \in \{0,1,2\}$ oraz dla odpowiednio dużych wartości k zachodzi $m^-(T_k(A)) = 1$. Zdefiniujmy przestrzenie

$$\mathbb{V}_0(A) = \bigoplus_{k\colon m^-(T_k(A))=0} V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G, \quad \mathbb{V}_2(A) = \bigoplus_{k\colon m^-(T_k(A))=2} V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G.$$

Twierdzenie 2.3.4. *Rozważmy układ równań* (2.9) *dla którego spełniony jest warunek* $\widetilde{i^0}(A) = 0$ *oraz ustalmy* $\lambda \in \Lambda$. *Wówczas*

$$\begin{aligned} &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot,\lambda), B(\operatorname{im}\pi_1)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}_2(A))\right) \star \left(\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}_0(A))\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dowód. Z definicji stopnia wiemy, że dla odpowiednio dużych N zachodzi równość

$$\begin{aligned}&\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot,\lambda\right),B\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right)\\ =\ &\left(\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(L_2,B\left(\mathbb{V}'^N\ominus\mathbb{V}'^0\right)\right)\right)^{-1}\star\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'^N}\left(\cdot,\lambda\right),B\left(\mathbb{V}'^N\right)\right).\end{aligned}$$

Zauważmy, że z formuły produktowej oraz z definicji odwzorowania L mamy

$$\begin{aligned}\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(L_2,B\left(\mathbb{V}'^N\ominus\mathbb{V}^0\right)\right)\ &=\ \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id},B\left(\bigoplus_{k=0}^{N-1}V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\right)\\ &=\ \prod_{k=0}^{N-1}\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id},B\left(V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\right).\end{aligned}$$

Ponadto w przypadku, gdy $m^-\left(T_k\left(A\right)\right)=2$ mamy:

$$\begin{aligned}&\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}\left(\cdot,\lambda\right),B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right)\\ =\ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\left(-\operatorname{Id},-\operatorname{Id}\right),B\left(\left(V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\oplus\left(V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\right)\right)\\ =\ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id},B\left(V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\right)\\ \star\ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id},B\left(V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\right).\end{aligned}$$

W przypadku $m^-\left(T_k\left(A\right)\right)=1$ otrzymujemy

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}\left(\cdot,\lambda\right),B\left(\mathbb{V}'_k\right)\right)=\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id},B\left(V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^H\ominus V_{-\Delta}\left(\mu_k\right)^G\right)\right).$$

Jeśli $m^-(T_k(A))=0$, to $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg(\mathcal{A}_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda),B(\mathbb{V}'_k))=\mathbb{I}$. Korzystając z powyższych równości, otrzymujemy tezę.

□

Rozważmy wielomian charakterystyczny macierzy $T_k(A)$ dany wzorem

$$W_k(\alpha)=\left(1-\frac{1+a}{1+\mu_k}-\alpha\right)\left(-1-\frac{-1+c}{1+\mu_k}-\alpha\right)-\frac{b^2}{(1+\mu_k)^2}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}W_k(\alpha)\ &=\ \alpha^2+\frac{a+c}{(1+\mu_k)}\alpha+\frac{2+a-c}{(1+\mu_k)}-1+\frac{(a+1)(c-1)-b^2}{(1+\mu_k)^2}\\ &=\ \alpha^2+\frac{a+c}{(1+\mu_k)}\alpha+\frac{-(1+\mu_k)^2+(2+a-c)(1+\mu_k)+(a+1)(c-1)-b^2}{(1+\mu_k)^2}.\end{aligned}$$

Ponieważ macierz $T_k(A)$ jest symetryczna, powyższy wielomian ma 2 pierwiastki rzeczywiste, oznaczmy je $\alpha_{1,k},\alpha_{2,k}$. Ze wzorów Viete'a wiemy, że

$$\alpha_{1,k}\alpha_{2,k}=\frac{-(1+\mu_k)^2+(2+a-c)(1+\mu_k)+(a+1)(c-1)-b^2}{(1+\mu_k)^2}\quad\text{i}\quad\alpha_{1,k}+\alpha_{2,k}=-\frac{a+c}{(1+\mu_k)}.$$

Zatem macierz $T_k(A)$ ma pierwiastki tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1+\mu_k)^2 - (2+a-c)(1+\mu_k) - ((a+1)(c-1)-b^2) < 0.$$

Rozwiązując tę nierówność ze względu na $1+\mu_k$ otrzymujemy $\delta = (2+a-c)^2+4((a+1)(c-1)-b^2)$ oraz jeżeli $\delta \geqslant 0$, to $\beta_1 = \frac{2+a-c-\sqrt{\delta}}{2} - 1$, $\beta_2 = \frac{2+a-c+\sqrt{\delta}}{2} - 1$ są pierwiastkami dwumianu $W(x) = (1+x)^2 - (2+a-c)(1+x) - ((a+1)(c-1)-b^2)$. Jeżeli $\delta < 0$, to kładziemy $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Zauważmy, że jeżeli $\mu_k \in \sigma(-\Delta;\Omega)$ jest pierwiastkiem dwumianu $W(x)$, to $\alpha_{1,k} = 0$ lub $\alpha_{2,k} = 0$, czyli $i^0(A) \neq 0$. Jeżeli ponadto $\dim \mathbb{V}'_k > 0$, to $\widetilde{i^0}(A) \neq 0$. Co więcej, prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 2.3.5. *$i^0(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mu_k \in \sigma(-\Delta;\Omega)$, μ_k nie jest pierwiastkiem dwumianu $W(x)$, to znaczy $\mu_k \neq \beta_1$ i $\mu_k \neq \beta_2$. Ponadto $\widetilde{i^0}(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mu_k \in \sigma(-\Delta;\Omega)$ takiego, że $\dim \mathbb{V}'_k > 0$, μ_k nie jest pierwiastkiem dwumianu $W(x)$.*

Dowód. Załóżmy, że dla każdego $\mu_k \in \sigma(-\Delta;\Omega)$, μ_k nie jest pierwiastkiem dwumianu $W(x)$ oraz $i^0(A) \neq 0$. Wówczas istnieje $\mu_k \in \sigma(-\Delta;\Omega)$ takie, że $\alpha_{1,k} = 0$ lub $\alpha_{2,k} = 0$, zatem

$$\alpha_{1,k}\alpha_{2,k} = \frac{-(1+\mu_k)^2 + (2+a-c)(1+\mu_k) + (a+1)(c-1) - b^2}{(1+\mu_k)^2} = 0,$$

czyli $-(1+\mu_k)^2+(2+a-c)(1+\mu_k)+(a+1)(c-1)-b^2 = 0$. To oznacza, że μ_k jest pierwiastkiem dwumianu $W(x) = (1+x)^2-(2+a-c)(1+x)-((a+1)(c-1)-b^2)$. Otrzymana sprzeczność i rozumowanie przed lematem kończy dowód pierwszej części lematu, drugą część dowodzi się analogicznie. □

Połóżmy $P = \sigma(-\Delta;\Omega) \cap (\beta_1,\beta_2)$ oraz zauważmy, że dla dowolnego $\mu_k \in P$ mamy

1. Jeżeli $a+c < 0$, to $m^-(T_k(A)) = 2$.
2. Jeżeli $a+c > 0$, to $m^-(T_k(A)) = 0$.

Załóżmy, że $\widetilde{i^0}(A) = 0$. Z powyższego rozumowania oraz z twierdzenia 2.3.4 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3.6. *Przy powyższych założeniach, stopień $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot,\lambda), B(\operatorname{im}\pi_1)\right)$ jest równy*

(1) $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu\in P} V_{-\Delta}(\mu)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu)^G\right)\right)$, *o ile* $a+c<0$,

(2) $\left(\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu\in P} V_{-\Delta}(\mu)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu)^G\right)\right)\right)^{-1}$, *o ile* $a+c>0$,

(3) $\mathbb{I} \in U(N(H))$, *jeżeli zbiór P jest pusty.*

Od tej pory będziemy rozważać zagadnienie

$$\begin{cases} -\Delta w_1 &= \nabla_{w_1} F(w_1, w_2) \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \Delta w_2 &= \nabla_{w_2} F(w_1, w_2) \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} &= \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 \qquad\quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Przypomnijmy, że z tym zagadnieniem związany jest funkcjonał $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ dany wzorem (2.8). Niech $z \in \mathbb{R}^2$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Oznaczmy $\nabla^2 F(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ b(z) & c(z) \end{bmatrix}$ i zauważmy, że

$$T_k(\nabla^2 F(z)) = L - \frac{1}{1+\mu_k}\left(L + \nabla^2 F(z)\right) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1+a(z)}{1+\mu_k} & -\frac{b(z)}{1+\mu_k} \\ -\frac{b(z)}{1+\mu_k} & -1 - \frac{-1+c(z)}{1+\mu_k} \end{bmatrix}.$$

Niech $\alpha_{1,k}(z), \alpha_{2,k}(z)$ będą (rzeczywistymi) wartościami własnymi macierzy $T_k(\nabla^2 F(z))$. Wówczas

$$\left(\nabla^2 \Phi(z)\right)_{|H_k} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,k}(z)\,\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,k}(z)\,\mathrm{Id} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathrm{Id}\colon V_{-\Delta}(\mu_k) \to V_{-\Delta}(\mu_k)$.

Zdefiniujmy $\lambda_z \in \mathbb{V}^G$ wzorem $\lambda_z(x) = z$ dla każdego $x \in \Omega^2$. Ponieważ pochodna $\mathcal{A}$ względem u spełnia $\mathcal{A}'_u(0,\lambda) = \pi_1 \circ \nabla^2\Phi(0,0,\lambda) \circ i$, to przy założeniu $\dim \mathbb{V}'_k > 0$ mamy

$$\left((\mathcal{A}'_u)_{|\mathbb{V}'_k}(\cdot,\lambda)\right) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,k}(z)\,\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,k}(z)\,\mathrm{Id} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathrm{Id}\colon V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G \to V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G$.

Zdefiniujmy podprzestrzenie

$$\mathbb{V}_0(\nabla^2 F(z)) = \bigoplus_{k\colon m^-(T_k(\nabla^2 F(z)))=0} V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G,$$

$$\mathbb{V}_2(\nabla^2 F(z)) = \bigoplus_{k\colon m^-(T_k(\nabla^2 F(z)))=2} V_{-\Delta}(\mu_k)^H \ominus V_{-\Delta}(\mu_k)^G.$$

Twierdzenie 2.3.7. *Niech $z \in \mathbb{R}^2$ będzie takie, że $\widetilde{i^0}(\nabla^2 F(z)) = 0$. Wówczas istnieje $\gamma_0 > 0$ taka, że dla każdego $0 < \gamma < \gamma_0$ mamy*

$$\begin{aligned} &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot,\lambda_z), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}'_u(0,\lambda_z), B(\operatorname{im}\pi_1)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}_2\left(\nabla^2 F(z)\right)\right)\right) \star \left(\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}_0\left(\nabla^2 F(z)\right)\right)\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dowód. Pierwsza równość wynika z własności linearyzacji dla stopnia z twierdzenia 1.4.5, druga z twierdzenia 2.3.4. □

Połóżmy $\delta(z) = (2 + a(z) - c(z))^2 + 4((a(z)+1)(c(z)-1) - b(z)^2)$. Jeżeli $\delta(z) \geqslant 0$, to $\beta_1(z) = \frac{2+a(z)-c(z)-\sqrt{\delta(z)}}{2} - 1$, $\beta_2(z) = \frac{2+a(z)-c(z)+\sqrt{\delta(z)}}{2} - 1$ są pierwiastkami dwumianu $W(x) = (1+x)^2 - (2+a(z)-c(z))(1+x) - ((a(z)+1)(c(z)-1) - b(z)^2)$. Jeżeli $\delta(z) < 0$, to kładziemy $\beta_1(z) = \beta_2(z) = 0$. Połóżmy $P(z) = \sigma(-\Delta;\Omega) \cap (\beta_1(z), \beta_2(z))$. Podobnie jak wcześniej, można pokazać, że macierz $T_k(\nabla^2 F(z))$ ma pierwiastki tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_k \in P(z)$. Co więcej, dla dowolnego $\mu_k \in P(z)$:

(1) jeżeli $a(z) + c(z) < 0$, to $m^-(T_k \nabla^2 F(z)) = 2$,

(2) jeżeli $a(z) + c(z) > 0$, to $m^-(T_k \nabla^2 F(z)) = 0$.

Podamy teraz wzory na stopień funkcjonału związanego z układem (2.10). Załóżmy, że $\widetilde{i^0}(\nabla^2 F(z)) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8. *Przy powyższych założeniach, dla odpowiednio małego $\gamma > 0$, stopień $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_z\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right)$ jest równy*

(1) $\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu \in P(z)} V_{-\Delta}\left(\mu\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\mu\right)^G\right)\right)$, *o ile* $a(z) + c(z) < 0$,

(2) $\left(\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\mu \in P(z)} V_{-\Delta}\left(\mu\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\mu\right)^G\right)\right)\right)^{-1}$, *o ile* $a\left(z\right) + c\left(z\right) > 0$,

(3) $\mathbb{I} \in U\left(N(H)\right)$, *jeżeli zbiór $P\left(z\right)$ jest pusty.*

Powyższe twierdzenie wynika z twierdzeń 2.3.6 i 2.3.7.

2.4 Zagadnienie łamania symetrii w układzie równań eliptycznych

W tym podrozdziale zastosujemy teorię bifurkacji, aby sformułować warunki implikujące zachodzenie zjawiska łamania symetrii. To znaczy, sformułujemy twierdzenia odpowiadające na pytanie: czy istnieje funkcja $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}^G$ taka, że układ

$$\begin{cases} -\Delta w_1 &= \nabla_{w_1} F(w_1, w_2) + h_1 \quad \text{w} \ \ \Omega, \\ \Delta w_2 &= \nabla_{w_2} F(w_1, w_2) + h_2 \quad \text{w} \ \ \Omega, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} &= \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 \qquad\qquad\quad\ \ \text{na} \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

posiada rozwiązanie $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{V}^H \backslash \mathbb{V}^G$?

Załóżmy, że warunki (a1)-(a3) są spełnione oraz przypomnijmy, że $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem związanym z powyższym układem, danym wzorem (2.8).

Oznaczmy

$$\begin{aligned} &m_1 = \inf\left\{\beta_1\left(z\right) : z \in \mathbb{R}^2\right\}, \quad M_1 = \sup\left\{\beta_1\left(z\right) : z \in \mathbb{R}^2\right\}, \\ &m_2 = \inf\left\{\beta_2\left(z\right) : z \in \mathbb{R}^2\right\}, \quad M_2 = \sup\left\{\beta_2\left(z\right) : z \in \mathbb{R}^2\right\}, \\ &\widetilde{\sigma}\left(-\Delta, \Omega\right) = \left\{\mu_i \in \sigma\left(-\Delta; \Omega\right) : \ \dim V_{-\Delta}\left(\mu_i\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\mu_i\right)^G > 0\right\} \cup \left\{\widetilde{\mu}_0 = -\infty\right\}. \end{aligned}$$

oraz $\widetilde{P}(z) = P(z) \cap \widetilde{\sigma}(-\Delta, \Omega)$. W poniższych twierdzeniach formułujemy warunki implikujące istnienie punktu bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\mathcal{A}(u, \lambda) = 0$. Aby to zrobić, korzystamy ze współczynników macierzy $\nabla^2 F(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ b(z) & c(z) \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 2.4.1. *Załóżmy, że dla każdego* $z \in \mathbb{R}^2$ $a(z) + c(z) < 0$ *lub* $a(z) + c(z) > 0$. *Przypuśćmy, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

1. *Istnieją* $\widetilde{\mu}_i, \widetilde{\mu}_j \in \widetilde{\sigma}(-\Delta, \Omega)$ *takie, że* $m_1 < \widetilde{\mu}_i < M_1$ *oraz* $\widetilde{\mu}_j < m_2 \leqslant M_2 < \widetilde{\mu}_{j+1}$, *przy czym przestrzeń* $V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_i)^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_i)^G$ *jest nieparzystego wymiaru lub jest nietrywialną* $N(H)$*-reprezentacją.*

2. *Istnieją* $\widetilde{\mu}_i, \widetilde{\mu}_j \in \widetilde{\sigma}(-\Delta, \Omega)$ *takie, że* $\widetilde{\mu}_i < m_1 \leqslant M_1 < \widetilde{\mu}_{i+1}$ *oraz* $m_2 < \widetilde{\mu}_j < M_2$, *przy czym przestrzeń* $V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_j)^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_j)^G$ *jest nieparzystego wymiaru lub jest nietrywialną* $N(H)$*-reprezentacją.*

Wówczas istnieje punkt bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\mathcal{A}(u, \lambda) = 0$.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że dla każdego $z \in \mathbb{R}^2$ $a(z) + c(z) < 0$. Udowodnimy, że założenie z pierwszego podpunktu implikuje tezę twierdzenia, dowód w drugim przypadku jest analogiczny.

Z założeń wynika, że istnieją z_1, z_2 takie, że $\beta_1(z_1), \beta_1(z_2), \beta_2(z_1), \beta_2(z_2) \neq \widetilde{\mu}_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $\beta_1(z_1) < \widetilde{\mu}_i < \beta_1(z_2)$, zatem operatory $\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_1})$, $\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_2})$ są odwracalne, zgodnie z lematem 2.3.5. Ponadto dla dostatecznie małego $\gamma > 0$, zgodnie z twierdzeniem 2.3.8, zachodzą równości

$$\begin{aligned} &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot, \lambda_{z_2}), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_2}), B(\operatorname{im}\pi_1)\right) \\ = \ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu}\in\widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^G\right)\right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot, \lambda_{z_1}), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_1}), B(\operatorname{im}\pi_1)\right) \\ = \ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu}\in\widetilde{P}(z_1)} V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^G\right)\right) \\ = \ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu}\in\widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^G\right)\right) \\ \star \ &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu}\in\widetilde{P}(z_1)\setminus\widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^G\right)\right), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z warunków na m_2 i M_2. Z założeń wynika, że

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu}\in\widetilde{P}(z_1)\setminus\widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu})^G\right)\right) \neq \mathbb{I} \in U(N(H)),$$

stąd

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot, \lambda_{z_2}), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)\right) \neq \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}(\cdot, \lambda_{z_2}), B_\gamma(\operatorname{im}\pi_1)\right).$$

Zatem teza wynika z twierdzenia 2.1.5. □

Przy założeniu spójności grupy powyższe twierdzenie można sformułować następująco:

Twierdzenie 2.4.2. *Załóżmy, że grupa $N(H)$ jest spójna oraz przypuśćmy, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

1. *Istnieją $\widetilde{\mu}_i, \widetilde{\mu}_j \in \widetilde{\sigma}(-\Delta, \Omega)$ takie, że $m_1 < \widetilde{\mu}_i < M_1$ oraz $\widetilde{\mu}_j < m_2 \leqslant M_2 < \widetilde{\mu}_{j+1}$, gdzie przestrzeń $V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_i)^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_i)^G$ jest nieparzystego wymiaru lub jest nietrywialną $N(H)$-reprezentacją.*

2. *Istnieją $\widetilde{\mu}_i, \widetilde{\mu}_j \in \widetilde{\sigma}(-\Delta, \Omega)$ takie, że $\widetilde{\mu}_i < m_1 \leqslant M_1 < \widetilde{\mu}_{i+1}$ oraz $m_2 < \widetilde{\mu}_j < M_2$, przy czym przestrzeń $V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_j)^H \ominus V_{-\Delta}(\widetilde{\mu}_j)^G$ jest nieparzystego wymiaru lub jest nietrywialną $N(H)$-reprezentacją.*

Wówczas istnieje punkt bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\mathcal{A}(u, \lambda) = 0$.

Dowód. Udowodnimy, że założenie z pierwszego podpunktu implikuje tezę twierdzenia, dowód w drugim przypadku jest analogiczny. Z założeń wynika, że istnieją z_1, z_2 takie, że $\beta_1(z_1)$, $\beta_1(z_2), \beta_2(z_1)$, $\beta_2(z_2) \neq \widetilde{\mu}_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $\beta_1(z_1) < \widetilde{\mu}_i < \beta_1(z_2)$, zatem operatory $\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_1})$, $\mathcal{A}'_u(0, \lambda_{z_2})$ są odwracalne, zgodnie z lematem 2.3.5. Zauważmy, że jeżeli $a(z_i)+c(z_i) < 0$ lub $a(z_i) + c(z_i) > 0$ dla $i = 1, 2$, to, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.4.1, otrzymujemy, że dla odpowiedniego małego $\gamma > 0$

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im} \pi_1\right)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu} \in \widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^G\right)\right),$$

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_1}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im} \pi_1\right)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu} \in \widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^G\right)\right)$$
$$\star \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu} \in \widetilde{P}(z_1) \setminus \widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^G\right)\right),$$

oraz

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu} \in \widetilde{P}(z_1) \setminus \widetilde{P}(z_2)} V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^G\right)\right) \neq \mathbb{I} \in U\left(N(H)\right),$$

stąd

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im} \pi_1\right)\right) \neq \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im} \pi_1\right)\right).$$

Załóżmy, że $a\left(z_1\right)+c\left(z_1\right) < 0 < a\left(z_2\right)+c\left(z_2\right)$, Z twierdzenia 2.3.8 wynika, że dla dostatecznie małego $\gamma > 0$:

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot, \lambda_{z_1}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im} \pi_1\right)\right) = \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu} \in \widetilde{P}(z_1)} \left(V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^G\right)\right)\right)$$

oraz

$$\begin{aligned} &\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot,\lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) \\ &= \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(-\operatorname{Id}, B\left(\bigoplus_{\widetilde{\mu}\in\widetilde{P}(z_2)}\left(V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^H \ominus V_{-\Delta}\left(\widetilde{\mu}\right)^G\right)\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Z lematu 1.4.4 otrzymujemy

$$\nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot,\lambda_{z_1}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right) \neq \nabla_{N(H)}\text{-}\deg\left(\mathcal{A}\left(\cdot,\lambda_{z_2}\right), B_\gamma\left(\operatorname{im}\pi_1\right)\right).$$

Zatem teza wynika z twierdzenia 2.1.5.

□

Przypomnijmy, że jeżeli istnieje punkt bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\mathcal{A}(u,\lambda)=0$, to istnieje $\lambda_0\in\Lambda$ taka, że składowa spójności $C(\lambda_0)$ w zbiorze

$$\operatorname{cl}\left\{(u,\lambda)\in\left(\operatorname{im}\pi_1\setminus\{0\}\right)\times\Lambda\colon \mathcal{A}(u,\lambda)=0\right\},$$

zawierająca $(0,\lambda_0)$, spełnia $C(\lambda_0)\neq\{(0,\lambda_0)\}$ oraz $C(\lambda_0)$ jest nieograniczona albo $C(\lambda_0)\cap(0\times(\Lambda\setminus\{\lambda_0\}))\neq\emptyset$. W szczególności otrzymujemy spójny zbiór rozwiązań problemu łamania symetrii. Ponadto dla każdej pary $(u,\lambda)\in C(\lambda_0)\setminus(\{0\}\times\Lambda)$, z równości $\mathcal{A}(u,\lambda)=0$ wynika, że $\pi_1(\nabla\Phi(i(u,\lambda)))=0$, zatem $\nabla\Phi(i(u,\lambda))\in\mathbb{V}^G$, a stąd wnioskujemy, że istnieje funkcja $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{V}^G$ taka, że układ

$$\begin{cases} -\Delta w_1 &= \nabla_{w_1}F(w_1,w_2)+h_1 \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \Delta w_2 &= \nabla_{w_2}F(w_1,w_2)+h_2 \quad \text{w} \quad \Omega, \\ \frac{\partial w_1}{\partial\nu} &= \frac{\partial w_2}{\partial\nu}=0 \qquad\qquad\quad \text{na} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

posiada rozwiązanie w $\mathbb{V}^H\setminus\mathbb{V}^G$. Innymi słowy, $i(C(\lambda_0)\setminus(\{0\}\times\Lambda))$ jest zbiorem rozwiązań problemu łamania symetrii. Co więcej, otrzymaliśmy, że cały spójny zbiór $i(C(\lambda_0))$ jest odwzorowywany przez $\nabla\Phi$ w spójny podzbiór zbioru $\mathbb{V}^G$.

2.5 Przykłady

W tym podrozdziale zastosujemy opisane wcześniej twierdzenia do badania równania i układu równań eliptycznych określonych na kulach B^2 i B^3.

Załóżmy, że $f\in C^1(\mathbb{R})$ spełnia nierówność $|f'(y)|\leqslant a+b|y|^q$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$, $q<\infty$.

Twierdzenie 2.5.1. *Załóżmy, że istnieją $z_1,z_2\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$ takie, że $f'(z_1)<k(k+2)<2k(k+1)<f'(z_2)$. Wówczas istnieje spójny zbiór w $H^1(B^2)^{\mathbb{Z}_k}\setminus H^1(B^2)^{\mathrm{SO}(2)}$ taki, że dla każdego elementu tego zbioru istnieje funkcja $h\in H^1(B^2)^{\mathrm{SO}(2)}$ taka, że te punkty są rozwiązaniami układu*

$$\begin{cases} -\Delta w &= f(w)+h \quad w \quad B^2, \\ \frac{\partial w}{\partial\nu} &= 0 \qquad\qquad na \quad S^1. \end{cases}$$

Dowód. Z założenia oraz z lematu 1.5.5 otrzymujemy, że $m < k(k+2) < \mu_{k1} < 2k(k+1) < M$, przy czym $m = \inf\{f'(z) \colon z \in \mathbb{R}\}$ i $M = \sup\{f'(z) \colon z \in \mathbb{R}\}$ oraz $\mu_{k1} \in \sigma(-\Delta; B^2)$ jest takie, że $\mathbb{R}[1,k] \subset V_{-\Delta}(\mu_{k1})$, zgodnie z lematem 1.5.4. Zauważmy, że $N(\mathbb{Z}_k) = \mathrm{SO}(2)$, $\mathbb{R}[1,k]^{\mathbb{Z}_k} = \mathbb{R}[1,k]$ oraz $\mathbb{R}[1,k]^{\mathrm{SO}(2)} = \{0\}$. Zatem przestrzeń $V_{-\Delta}(\mu_{k1})^{\mathbb{Z}_k} \ominus V_{-\Delta}(\mu_{k1})^{\mathrm{SO}(2)}$ jest nietrywialną $N(\mathbb{Z}_k)$-reprezentacją, czyli są spełnione założenia twierdzenia 2.2.6. To kończy dowód. □

Rozważmy układ

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \nabla_{w_1} F(w_1, w_2) + f_1 & \text{w } B^2, \\ \Delta w_2 = \nabla_{w_2} F(w_1, w_2) + f_2 & \text{w } B^2, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 & \text{na } S^1 \end{cases} \tag{2.11}$$

i załóżmy, że spełnione są założenia (a2)-(a3). Połóżmy $\mathbb{V} = H^1(B^2) \oplus H^1(B^2)$.

Twierdzenie 2.5.2. *Załóżmy, że istnieją $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$\beta_1(z_1) < \beta_1(z_2) < 0 \quad i \quad \beta_2(z_1) < k(k+2) < 2k(k+1) < \beta_2(z_2).$$

Wówczas istnieje spójny zbiór w $\mathbb{V}^{\mathbb{Z}_k} \setminus \mathbb{V}^{\mathrm{SO}(2)}$ taki, że dla każdego elementu tego zbioru istnieje funkcja $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}^{\mathrm{SO}(2)}$ taka, że te punkty są rozwiązaniami układu (2.11).

Dowód. Z założenia oraz z lematu 1.5.5 otrzymujemy, że

$$-\infty = \widetilde{\mu}_0 < m_1 < M_1 < \widetilde{\mu}_1 \text{ oraz } m_2 < k\,(k+2) < \mu_{k1} < 2k\,(k+1) < M_2,$$

przy czym

$$m_1 = \inf \left\{ \beta_1(z) : z \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad M_1 = \sup \left\{ \beta_1(z) : z \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
$$m_2 = \inf \left\{ \beta_2(z) : z \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad M_2 = \sup \left\{ \beta_2(z) : z \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

oraz $\mu_{k1} \in \sigma(-\Delta; B^2)$ jest takie, że $\mathbb{R}[1,k] \subset V_{-\Delta}(\mu_{k1})$, zgodnie z lematem 1.5.4. Zauważmy, że $N(\mathbb{Z}_k) = \mathrm{SO}(2)$, $\mathbb{R}[1,k]^{\mathbb{Z}_k} = \mathbb{R}[1,k]$ oraz $\mathbb{R}[1,k]^{\mathrm{SO}(2)} = \{0\}$. Zatem przestrzeń $V_{-\Delta}(\mu_{k1})^{\mathbb{Z}_k} \ominus V_{-\Delta}(\mu_{k1})^{\mathrm{SO}(2)}$ jest nietrywialną $N(\mathbb{Z}_k)$-reprezentacją, czyli są spełnione założenia twierdzenia 2.4.2. To kończy dowód. □

W dalszym ciągu tego podrozdziału będziemy rozważać równanie i układ eliptyczny na kuli B^3, na której działa grupa SO(3). Dla dowolnej podgrupy $H \in \overline{\mathrm{sub}}(\mathrm{SO}(3))$, $H^1(B^3)^H$ jest trywialną reprezentacją grupy H, zatem $H^1(B^3)^H$ jest również reprezentacją grupy Weyla $W(H) = N(H)/H$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i połóżmy $H = \mathbb{Z}_k$, przy czym $\mathbb{Z}_k \subset \mathrm{SO}(3)$ składa się z macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \varphi \in \left\{ \frac{2i\pi}{k} : i = 0, 1, \ldots, k-1 \right\}.$$

Zauważmy, że $W(\mathbb{Z}_k) = \mathrm{O}(2)$, vide [21], czyli $H^1(B^3)^{\mathbb{Z}_k}$ jest O(2)-reprezentacją, a zatem również SO(2)-reprezentacją.

Twierdzenie 2.5.3. *Załóżmy, że istnieją $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{N}$ takie, że $f'(z_1) < \mu_{kn} < f'(z_2)$. Wówczas istnieje spójny zbiór w $H^1(B^3)^{\mathbb{Z}_k} \setminus H^1(B^3)^{\mathrm{SO}(2)}$ taki, że dla każdego elementu tego zbioru istnieje funkcja $h \in H^1(B^3)^{\mathrm{SO}(2)}$ taka, że te punkty są rozwiązaniami układu*

$$\begin{cases} -\Delta w = f(w) + h & w \;\; B^3, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & na \;\; S^2. \end{cases}$$

Dowód. Z założenia otrzymujemy, że $m < \mu_{kn} < M$, przy czym $m = \inf\{f'(z) \colon z \in \mathbb{R}\}$ i $M = \sup\{f'(z) \colon z \in \mathbb{R}\}$ oraz $\mu_{kn} \in \sigma(-\Delta; B^3)$ jest takie, że $\mathbb{R}[1,k] \subset V_{-\Delta}(\mu_{kn})$, zgodnie z lematem 1.5.7. Zauważmy, że $N(\mathbb{Z}_k) = \mathrm{SO}(2)$, $\mathbb{R}[1,k]^{\mathbb{Z}_k} = \mathbb{R}[1,k]$ oraz $\mathbb{R}[1,k]^{\mathrm{SO}(2)} = \{0\}$. Zatem przestrzeń $V_{-\Delta}(\mu_{kn})^{\mathbb{Z}_k} \ominus V_{-\Delta}(\mu_{kn})^{\mathrm{SO}(2)}$ jest nietrywialną $N(\mathbb{Z}_k)$-reprezentacją, czyli są spełnione założenia twierdzenia 2.2.6. To kończy dowód. □

Zauważmy, że jeżeli $0 < m < k$, to w powyższym twierdzeniu grupę $\mathbb{Z}_k$ możemy zastąpić grupą $\mathbb{Z}_m$, zgodnie z lematem 1.5.7.

Rozważmy układ

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \nabla_{w_1} F(w_1, w_2) + f_1 & \text{w} \;\; B^3, \\ \Delta w_2 = \nabla_{w_2} F(w_1, w_2) + f_2 & \text{w} \;\; B^3, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0 & \text{na} \;\; S^2 \end{cases} \tag{2.12}$$

i załóżmy, że spełnione są założenia (a2)-(a3). Połóżmy $\mathbb{V} = H^1(B^3) \oplus H^1(B^3)$.

Twierdzenie 2.5.4. *Załóżmy, że istnieją $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$\beta_1(z_1) < \beta_1(z_2) < 0 \quad i \quad \beta_2(z_1) < \mu_{kn} < \beta_2(z_2).$$

Wówczas istnieje spójny zbiór w $\mathbb{V}^{\mathbb{Z}_k} \setminus \mathbb{V}^{\mathrm{SO}(2)}$ taki, że dla każdego elementu tego zbioru istnieje funkcja $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}^{\mathrm{SO}(2)}$ taka, że te punkty są rozwiązaniami układu (2.12).

Dowód. Z założenia oraz z lematu 1.5.5 otrzymujemy, że

$$\widetilde{\mu}_0 < m_1 < M_1 < \widetilde{\mu}_1 \text{ oraz } m_2 < \mu_{kn} < M_2,$$

przy czym

$$m_1 = \inf\left\{\beta_1(z) \colon z \in \mathbb{R}^2\right\}, \quad M_1 = \sup\left\{\beta_1(z) \colon z \in \mathbb{R}^2\right\},$$
$$m_2 = \inf\left\{\beta_2(z) \colon z \in \mathbb{R}^2\right\}, \quad M_2 = \sup\left\{\beta_2(z) \colon z \in \mathbb{R}^2\right\},$$

oraz $\mu_{kn} \in \sigma(-\Delta; B^3)$ jest takie, że $\mathbb{R}[1,k] \subset V_{-\Delta}(\mu_{kn})$, zgodnie z lematem 1.5.4. Zauważmy, że $N(\mathbb{Z}_k) = \mathrm{SO}(2)$, $\mathbb{R}[1,k]^{\mathbb{Z}_k} = \mathbb{R}[1,k]$ oraz $\mathbb{R}[1,k]^{\mathrm{SO}(2)} = \{0\}$. Zatem przestrzeń $V_{-\Delta}(\mu_{k1})^{\mathbb{Z}_k} \ominus V_{-\Delta}(\mu_{k1})^{\mathrm{SO}(2)}$ jest nietrywialną $N(\mathbb{Z}_k)$-reprezentacją, czyli są spełnione założenia twierdzenia 2.4.2. To kończy dowód. □

Podobnie jak wcześniej, w powyższym twierdzeniu grupę $\mathbb{Z}_k$ możemy zastąpić grupą $\mathbb{Z}_m$, o ile $0 < m < k$.

Rozdział 3

Nieograniczone zbiory rozwiązań w niekooperatywnym układzie równań eliptycznych na sferze

Rozważmy równanie $-\Delta_{S^{n-1}} u = f(u, \mu)$. W pracy [52] pokazano, że jeżeli z punktu $(0, \mu_0)$ bifurkuje spójny zbiór słabych rozwiązań tego równania, to jest on nieograniczony. Aby to pokazać, skorzystano z niezmienniczej wersji alternatywy Rabinowitza, udowodnionej przy użyciu stopnia SO(2)-współzmienniczych odwzorowań ortogonalnych. W tym rozdziale użyjemy stopnia SO(2)-niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych, aby uogólnić ten wynik na przypadek niekooperatywnego układu równań. Co więcej, korzystając z tego stopnia, scharakteryzujemy punkty globalnej bifurkacji, w których zachodzi zjawisko łamania symetrii.

3.1 Układ równań eliptycznych na sferze

Rozważmy sferę S^{n-1} jako SO(2)-niezmienniczy podzbiór reprezentacji $\mathbb{R}[1,1] \oplus \mathbb{R}[n-2, 0]$ oraz rozważmy następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 \Delta_{S^{n-1}} u_1 &=& \nabla_{u_1} F(u, \mu), \\ a_2 \Delta_{S^{n-1}} u_2 &=& \nabla_{u_2} F(u, \mu), \\ & \vdots & \\ a_p \Delta_{S^{n-1}} u_p &=& \nabla_{u_p} F(u, \mu), \end{array} \right. \quad \text{na } S^{n-1}, \tag{3.1}$$

gdzie

(a1) $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R})$,

(a2) $\nabla_u F(u, \mu) = \mu u + \nabla_u g(u, \mu)$, gdzie $g \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R})$ i dla każdego $\mu \in \mathbb{R}$ zachodzi $\nabla_u g(0, \mu) = 0$ oraz $\nabla_u^2 g(0, \mu) = 0$,

(a3) $a_i \in \{-1, 1\}$.

Przez n_- oznaczać będziemy liczbę tych elementów a_i, $i = 1, \dots, p$, dla których $a_i = -1$, a przez n_+ - dla których $a_i = 1$.

Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^{p} H^1(S^{n-1})$. Ponieważ przestrzeń $H^1(S^{n-1})$ jest ortogonalną SO(2)-reprezentacją, to, zgodnie z lematem 1.2.2, przestrzeń $\mathbb{V}$ również jest ortogonalną SO(2)-reprezentacją.

Zdefiniujmy funkcjonał $\Phi\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi(u,\mu) = \frac{1}{2}\int\limits_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{p} \left(-a_i|\nabla u_i(x)|^2\right) d\sigma - \int\limits_{S^{n-1}} F(u(x),\mu)\, d\sigma \tag{3.2}$$

oraz zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\Phi(u,\mu) &= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{S^{n-1}}\left(-a_i|\nabla u_i(x)|^2\right)d\sigma - \frac{\mu}{2}\int\limits_{S^{n-1}}|u_i(x)|^2\,d\sigma\right) - \int\limits_{S^{n-1}} g(u(x),\mu)\,d\sigma \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{S^{n-1}}\left(-a_i\left(|\nabla u_i(x)|^2+|u_i(x)|^2\right)\right)d\sigma - \frac{\mu-a_i}{2}\int\limits_{S^{n-1}}|u_i(x)|^2\,d\sigma\right) \\
&\quad - \int\limits_{S^{n-1}} g(u(x),\mu)\,d\sigma \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(-\frac{a_i}{2}||u_i||^2_{H^1(S^{n-1})} - \frac{\mu-a_i}{2}\int\limits_{S^{n-1}}|u_i(x)|^2\,d\sigma\right) - \int\limits_{S^{n-1}} g(u(x),\mu)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator $T\colon H^1(S^{n-1})\to H^1(S^{n-1})$ oraz rodzinę funkjconałów $\eta_0\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorami

$$\forall_{v\in H^1(S^{n-1})}\quad \langle Tu,v\rangle_{H^1(S^{n-1})} = \int\limits_{S^{n-1}} u(x)v(x)d\sigma, \quad \eta_0(u,\mu) = \int\limits_{S^{n-1}} g(u(x),\mu)d\sigma.$$

Z powyższych obliczeń oraz z własności operatora Laplace'a–Beltramiego wynika następujący fakt:

Fakt 3.1.1. *Przy powyższych założeniach zachodzi poniższa formuła:*

$$\begin{aligned}
\nabla_u\Phi(u,\mu) &= Lu - (\mu\,\mathrm{Id}+L)\,K(u) - \nabla_u\eta_0(u,\mu) \\
&= (-a_1u_1 - (\mu-a_1)\,Tu_1,\ldots,-a_pu_p-(\mu-a_p)\,Tu_p) - \nabla_u\eta_0(u,\mu),
\end{aligned}$$

gdzie

(1) $L = -\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_p)\cdot\mathrm{Id}\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, ograniczonym* SO(2)*-współzmienniczym operatorem Fredholma,*

(2) $K = (T,\ldots,T)\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, pełnociągłym,* SO(2)*-współzmienniczym operatorem ograniczonym,*

(3) $\nabla_u\eta_0(u,\mu)\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{V}$ *jest pełnociągłym,* SO(2)*-współzmienniczym operatorem takim, że* $\nabla_u\eta_0(0,\mu)=0$, $\nabla_u^2\eta_0(0,\mu)=0$ *dla każdego* $\mu\in\mathbb{R}$,

(4) $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{V}$ *jest słabym rozwiązaniem zagadnienia* (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\nabla_u \Phi(u, \mu) = 0$, *to znaczy* u *jest punktem krytycznym funkcjonału* Φ.

Zauważmy, że z powyższego faktu wynika, iż operator $\nabla_u \Phi$ jest SO(2)-współzmienniczy.

Połóżmy $\mathcal{P}(\Phi) = \{\mu_{m_0} \in \mathbb{R}\colon \nabla_u^2 \Phi(0, \mu_{m_0})$ nie jest izomorfizmem$\}$. Przypomnijmy, że przez $\sigma(-\Delta_{S^{n-1}}) = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\}$ oznaczamy spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na sferze S^{n-1} oraz $\sigma^-(-\Delta_{S^{n-1}}) = \{-\mu_m \colon \mu_m \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})\}$. Z definicji funkcjonału Φ oraz z faktu 3.1.1 wynika następujący lemat:

Lemat 3.1.2. *Przy powyższych założeniach*

(1) $\mathcal{P}(\Phi) = \begin{cases} \sigma(-\Delta_{S^{n-1}}), & \text{gdy } n_- > 0, n_+ = 0, \\ \sigma^-(-\Delta_{S^{n-1}}), & \text{gdy } n_+ > 0, n_- = 0, \\ \sigma(-\Delta_{S^{n-1}}) \cup \sigma^-(-\Delta_{S^{n-1}}), & \text{gdy } n_- > 0, n_+ > 0, \end{cases}$

(2) $\sigma(K) = \left\{\frac{1}{\mu_m + 1} \colon \mu_m \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})\right\}$,

(3) $V_K\left(\frac{1}{\mu_m+1}\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{H}_m^n$ *dla dowolnego* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ponadto jeżeli $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$, *to*

(4) jeżeli $\mu_{m_0} > 0$, *to* $n_- > 0$, $\mu_{m_0} \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$ *oraz* $\ker \nabla^2 \Phi(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_-} \mathcal{H}_{m_0}^n$,

(5) jeżeli $\mu_{m_0} < 0$, *to* $n_+ > 0$, $-\mu_{m_0} \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$ *oraz* $\ker \nabla^2 \Phi(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_+} \mathcal{H}_{m_0}^n$.

W poniższym twierdzeniu sformułujemy warunek konieczny istnienia bifurkacji w zadanym punkcie.

Twierdzenie 3.1.3. *Zbiór* $\mathcal{P}(\Phi)$ *nie ma skończonych punktów skupienia. Ponadto jeżeli punkt* $(0, \mu_{m_0})$ *jest punktem bifurkacji rozwiązań równania* $\nabla_u \Phi(u, \mu) = 0$, *to* $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$.

Powyższe twierdzenie wynika z własności spektralnych operatora $-\Delta_{S^{n-1}}$ oraz z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Zdefiniujmy ciąg SO(2)-współzmienniczych rzutów ortogonalnych $\Gamma = \{\tau_k \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V} \colon k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ następująco:

(1) $\mathbb{V}^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}^k = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{V}_j$, gdzie $\mathbb{V}_j = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{H}_{j-1}^n$ dla $k \in \mathbb{N}$,

(3) $\tau_k \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest rzutem takim, że $\operatorname{im} \tau_k = \mathbb{V}^k$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Z definicji Γ oraz z własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a–Beltramiego wynika, że jest to SO(2)-niezmienniczy schemat aproksymacyjny na $\mathbb{V}$. Ponadto $\ker L = \mathbb{V}^0$ oraz dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi $\tau_k \circ L = L \circ \tau_k$.

Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$ oraz zdefiniujmy indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(2))$ równością

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \\ = \;& \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi\left(0, \mu_{m_0} + \epsilon\right), B(\mathbb{V})\right) - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi\left(0, \mu_{m_0} - \epsilon\right), B(\mathbb{V})\right), \end{aligned}$$

przy czym liczba $\epsilon > 0$ jest odpowiednio mała. Z twierdzenia 3.1.3 wynika, że powyższa definicja jest poprawna. Ponadto dla ustalonego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$ oznaczamy

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathrm{SO}(2)}, \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_1}, \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_2}, \ldots\right).$$

Połóżmy $\mathbb{V}(m_0) = \bigoplus_{i=0}^{m_0} \mathcal{H}_i^n$.

W następnych lematach podajemy formuły na indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(2))$ dla $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$.

Lemat 3.1.4. *Załóżmy, że $n_- > 0$ oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}}) \setminus \{0\}$. Wówczas indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})$ jest równy*

$$\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}\left(m_0 - 1\right)\right)\right)\right)^{n_-} \star \left(\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)\right)^{n_-} - \mathbb{I}\right).$$

Ponadto

(a) jeżeli n_- jest liczbą parzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)^{n_-} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(b) jeżeli $\dim \mathcal{H}_{m_0}^n$ oraz $n_- \cdot \dim \mathbb{V}(m_0 - 1)$ są liczbami parzystymi, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)^{n_-} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(c) jeżeli $\dim \mathcal{H}_{m_0}^n$ jest liczbą parzystą oraz $n_- \cdot \dim \mathbb{V}(m_0 - 1)$ jest liczbą nieparzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \mathbb{I} - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)^{n_-} \in U_+(\mathrm{SO}(2)).$$

Dowód. Zauważmy, że z faktu 3.1.3 wynika, że $\nabla^2\Phi(0, \mu_{m_0} \pm \epsilon) : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest izomorfizmem dla dostatecznie małego $\epsilon > 0$. Ustalmy $N > m_0$ takie, że zachodzi równość

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi\left(0, \mu_{m_0} \pm \epsilon\right), B\left(\mathbb{V}\right)\right) \\ = \;& \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(L, B\left(\mathbb{V}^{N+1}\right)\right)\right)^{-1} \star \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(L - \left(\mu_{m_0}\,\mathrm{Id} + L \pm \epsilon\right)K, B\left(\mathbb{V}^{N+1}\right)\right). \end{aligned}$$

Korzystając z powyższej równości, z definicji operatorów K i L oraz z własności stopnia SO(2)-współzmienniczych odwzorowań gradientowych, a także z tego, że $\sigma(-\Delta_{S^{n-1}}) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
& \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi\left(0,\mu_{m_0}\pm\epsilon\right),B\left(\mathbb{V}\right)\right) \\
= & \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{-n_+}\star\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(L-\left(\mu_{m_0}\mathrm{Id}+L\pm\epsilon\right)K,B\left(\mathbb{V}^{N+1}\right)\right) \\
= & \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{-n_+}\star\prod_{i=1}^{p}\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-a_i\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}-a_i\pm\epsilon\right)T,B(\mathbb{V}(N))\right) \\
= & \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{-n_+}\star\prod_{a_i=1}\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}-1\pm\epsilon\right)T,B(\mathbb{V}(N))\right) \\
\star & \prod_{a_i=-1}\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}+1\pm\epsilon\right)T,B(\mathbb{V}(N))\right)=\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{-n_+} \\
\star & \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{n_+}\star\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}+1\pm\epsilon\right)T,B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{n_-} \\
= & \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}+1\pm\epsilon\right)T,B(\mathbb{V}(N))\right)\right)^{n_-}.
\end{aligned}
$$

Niech $\mu_i\in\sigma\left(-\Delta_{S^{n-1}}\right)$. Zauważmy, że jeżeli $\alpha>\mu_i$, to homotopia

$$
h\left(u,t\right)=t\left(u-\left(\alpha+1\right)Tu\right)+\left(1-t\right)\left(-u\right)
$$

jest $B\left(\mathcal{H}_i^n\right)$-dopuszczalna, zatem

$$
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\alpha T,B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right)=\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right),
$$

natomiast jeżeli $\alpha<\mu_i$, to homotopia $h\left(u,t\right)=t\left(u-\left(\alpha+1\right)Tu\right)+\left(1-t\right)u$ jest $B\left(\mathcal{H}_i^n\right)$-dopuszczalna, zatem

$$
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\alpha T,B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right)=\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id},B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right).
$$

Korzystając z formuły produktowej, otrzymujemy

$$
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}+1+\epsilon\right)\right)T,B(\mathbb{V}(N))=\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathbb{V}\left(m_0\right)\right)\right)
$$

oraz

$$
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-\left(\mu_{m_0}+1-\epsilon\right)\right)T,B(\mathbb{V}(N))=\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathbb{V}\left(m_0-1\right)\right)\right).
$$

Biorąc pod uwagę powyższe równości, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}\left(\mu_{m_0}\right) &= \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathbb{V}\left(m_0\right)\right)\right)\right)^{n_-}-\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathbb{V}\left(m_0-1\right)\right)\right)\right)^{n_-} \\
&= \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathbb{V}\left(m_0-1\right)\right)\right)\right)^{n_-}\star\left(\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)\right)^{n_-}-\mathbb{I}\right).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że ze wzoru (1.6) oraz z lematu 1.3.8 wynika, że jeżeli $\dim\mathcal{H}_{m_0}^n$ jest liczbą parzystą, to

$$
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{\mathrm{SO}(2)}\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)=1,
$$

$$
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{\mathbb{Z}_i}\left(-\mathrm{Id},B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)<0 \text{ dla każdego } i\in\mathbb{N}
$$

oraz

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = (-1)^{n_- \dim \mathbb{V}(m_0-1)} \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}^n_{m_0}\right)\right)^{n_-} - \mathbb{I}\Big) \in U_-(\mathrm{SO}(2)).$$

Z powyższej równości wynikają podpunkty (b) i (c). Analogicznie, jeżeli n_- jest liczbą parzystą, to

$$\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_{\mathrm{SO}(2)}\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}^n_{m_0}\right)\right)\Big)^{n_-} = 1,$$

a stąd wynika podpunkt (a). □

Lemat 3.1.5. *Załóżmy, że $n_+ > 0$ i ustalmy $\mu_{m_0} \in \sigma\left(-\Delta_{S^{n-1}}\right)\setminus\{0\}$. Wówczas indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{m_0})$ jest równy*

$$\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}(m_0)\right)\right)\Big)^{-n_+} \star \Big(\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}^n_{m_0}\right)\right)\Big)^{n_+} - \mathbb{I}\Big).$$

Ponadto

(a) jeżeli n_+ jest liczbą parzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}^n_{m_0}\right)\right)^{n_+} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(b) jeżeli $\dim \mathcal{H}^n_{m_0}$ oraz $n_+ \cdot \dim \mathbb{V}(m_0)$ są liczbami parzystymi, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}^n_{m_0}\right)\right)^{n_+} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(c) jeżeli $\dim \mathcal{H}^n_{m_0}$ jest liczbą parzystą oraz $n_+ \cdot \dim \mathbb{V}(m_0)$ jest liczbą nieparzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \mathbb{I} - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}^n_{m_0}\right)\right)^{n_+} \in U_+(\mathrm{SO}(2)).$$

Dowód. Argumentując podobnie jak w lemacie 3.1.4, otrzymujemy, że dla odpowiednio dużych $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\Big(\nabla^2\Phi\left(0, -\mu_{m_0} \pm \epsilon\right), B(\mathbb{V})\Big)\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+} \star \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\Big(L - \left(-\mu_{m_0}\mathrm{Id} + L \pm \epsilon\right)K, B\Big(\mathbb{V}^{N+1}\Big)\Big)\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+} \star \prod_{i=1}^{p} \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-a_i\,\mathrm{Id} - \left(-\mu_{m_0} - a_i \pm \epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right)\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+} \star \prod_{a_i=1} \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id} - \left(-\mu_{m_0} - 1 \pm \epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right)\\
\star\ &\prod_{a_i=-1} \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id} - \left(-\mu_{m_0} + 1 \pm \epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right) = \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+}\\
\star\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id} - \left(-\mu_{m_0} - 1 \pm \epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{n_+} \star \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{n_-}\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+} \star \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id} - \left(-\mu_{m_0} - 1 \pm \epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{n_+}.
\end{aligned}$$

Niech $\mu_i \in \sigma\left(-\Delta_{S^{n-1}}\right)$. Postępując analogicznie jak w dowodzie lematu 3.1.4, dowodzimy, że jeżeli $\alpha > \mu_i$, to

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}+\alpha T, B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right)$$

oraz jeżeli $\alpha < \mu_i$, to

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}+\alpha T, B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_i^n\right)\right).$$

Stąd

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}-\left(-\mu_{m_0}-1+\epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{i=m_0}^{N}\mathcal{H}_i^n\right)\right)$$

oraz

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}-\left(-\mu_{m_0}-1-\epsilon\right)T, B(\mathbb{V}(N))\right) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{i=m_0+1}^{N}\mathcal{H}_i^n\right)\right).$$

Biorąc pod uwagę powyższe równości, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}\left(-\mu_{m_0}\right)\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+}\star\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{i=m}^{N}\mathcal{H}_i^n\right)\right)\right)^{n_+}\\
-\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+}\star\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{i=m+1}^{N}\mathcal{H}_i^n\right)\right)\right)^{n_+}\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(N))\right)\Big)^{-n_+}\star\left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{i=m+1}^{N}\mathcal{H}_i^n\right)\right)\right)^{n_+}\\
\star\ &\left(\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)\Big)^{n_+}-\mathbb{I}\right)\\
=\ &\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}\left(m_0\right)\right)\right)\Big)^{-n_+}\star\left(\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_{m_0}^n\right)\right)\Big)^{n_+}-\mathbb{I}\right).
\end{aligned}$$

Argumentując podobnie jak w lemacie 3.1.4, otrzymujemy zależności (a)-(c).

□

W poniższym lemacie podajemy indeks bifurkacji w punkcie $0 \in P(\Phi)$.

Lemat 3.1.6. *Indeks bifurkacji w punkcie $0 \in P(\Phi)$ dany jest równością:*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0) = \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_0^n\right)\right)\Big)^{n_-} - \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_0^n\right)\right)\Big)^{-n_+}.$$

Dowód. Argumentując tak jak w dowodzie lematu 3.1.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi(0,\epsilon), B(\mathbb{V})\right) &= \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\mathrm{Id}-(1+\epsilon)T, B(\mathbb{V}(K))\right)\Big)^{n_-}\\
&= \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_0^n\right)\right)\Big)^{n_-}.
\end{aligned}$$

Argumentując tak jak w dowodzie lematu 3.1.5, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi\left(0,-\epsilon\right), B\left(\mathbb{V}\right)\right) \\
&= \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}\left(K\right)\right)\right)\right)^{-n_+} \star \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}-\left(-1-\epsilon\right)T, B\left(\mathbb{V}\left(K\right)\right)\right)\right)^{n_+} \\
&= \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathbb{V}\left(K\right)\right)\right)\right)^{-n_+} \star \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\bigoplus_{i=1}^{K}\mathcal{H}_i^n\right)\right)\right)^{n_+} \\
&= \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_0^n\right)\right)\right)^{-n_+}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}\left(0\right) = \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_0^n\right)\right)\right)^{n_-} - \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(-\mathrm{Id}, B\left(\mathcal{H}_0^n\right)\right)\right)^{-n_+},$$

co kończy dowód. □

Zauważmy, że z powyższego wzoru wynika równość:

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0)_H = \begin{cases} (-1)^{n_-} - (-1)^{n_+}, & \text{gdy } H = \mathrm{SO}(2), \\ 0, & \text{gdy } H \neq \mathrm{SO}(2). \end{cases}$$

Zatem $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0) \neq \Theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy n_-, n_+ są różnej parzystości.

Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathbb{R}$ i oznaczmy przez $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ składową spójności zbioru

$$\mathrm{cl}\left\{(u,\mu) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} \colon \nabla_u \Phi(u,\mu) = 0, u \neq 0\right\},$$

zawierającą punkt $(0, \mu_{m_0}) \in \{0\} \times \mathbb{R}$. Stosując niezmienniczą alternatywę Rabinowitza do układu (3.1), otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.7. *Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$. Jeżeli jeden z poniższych warunków jest spełniony*

(i) $\mu_{m_0} > 0$ i $\mathcal{H}_{m_0}^n$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(2)$-reprezentacją lub $n_- \cdot \dim \mathcal{H}_{m_0}^n$ jest liczbą nieparzystą,

(ii) $\mu_{m_0} < 0$ i $\mathcal{H}_{m_0}^n$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(2)$-reprezentacją lub $n_+ \cdot \dim \mathcal{H}_{m_0}^n$ jest liczbą nieparzystą,

(iii) $\mu_{m_0} = 0$ i $\mathcal{H}_0^n$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(2)$-reprezentacją lub $\dim \mathcal{H}_0^n$ jest liczbą nieparzystą oraz n_-, n_+ są różnej parzystości,

to $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \oplus \mathbb{R}$ jest zbiorem nieograniczonym albo

(1) $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \oplus \mathbb{R}$ jest zbiorem ograniczonym,

(2) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(3) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(2))$.

Szkic dowodu powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy [23]. Zauważmy, że dla ustalonego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$, założenia powyższego twierdzenia implikują, iż $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(2))$, vide [19]. Ponadto z twierdzenia 1.5.10 wynika, że dla każdego $m_0 \in \mathbb{N}$ przestrzeń $\mathcal{H}_{m_0}^n$ jest nietrywialną SO(2)-reprezentacją, zatem założenia twierdzenia 3.1.7 są spełnione dla każdego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi) \setminus \{0\}$. W następnym podrozdziale pokażemy, że dla układu (3.1) druga możliwość w powyższej alternatywie, to znaczy zbiór $C(\mu_{m_0})$ jest ograniczony w $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$, może być wykluczona dla dowolnego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi) \setminus \{0\}$, to znaczy mogą istnieć tylko nieograniczone zbiory rozwiązań tego układu.

3.2 Nieograniczone zbiory rozwiązań oraz zagadnienie łamania symetrii

Przejdziemy teraz do sformułowania głównych wyników tego rozdziału, to znaczy udowodnimy nieograniczoność zbioru słabych rozwiązań niekooperatywnych układów równań eliptycznych rozważanych na sferze S^{n-1}. Scharakteryzujemy również punkty bifurkacji, w których zachodzi zjawisko globalnego łamania symetrii. Do każdego punktu spełniającego warunek konieczny bifurkacji przyporządkowaliśmy w poprzednim podrozdziale indeks bifurkacji wyrażony poprzez stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych. Pokażemy, że przy dowolnym wyborze tych punktów, suma indeksów bifurkacji jest nietrywialnym elementem pierścienia Eulera $U(SO(2))$. To implikuje nieograniczoność bifurkujących zbiorów rozwiązań, zgodnie z twierdzeniem 3.1.7.

Rozważmy układ

$$\begin{cases} a_1\Delta_{S^{n-1}}u_1 &= \nabla_{u_1}F(u,\mu), \\ a_2\Delta_{S^{n-1}}u_2 &= \nabla_{u_2}F(u,\mu), \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad \text{na } S^{n-1}, \\ a_p\Delta_{S^{n-1}}u_p &= \nabla_{u_p}F(u,\mu), \end{cases} \tag{3.3}$$

gdzie F, $a_1,\ldots,a_p$ spełniają założenia (a1)-(a3). Przypomnijmy, że $u=(u_1,\ldots,u_p)\in\mathbb{V}=\bigoplus_{i=1}^{p} H^1(S^{n-1})$ jest słabym rozwiązaniem powyższego układu wtedy i tylko wtedy, gdy u jest punktem krytycznym funkcjonału $\Phi\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadanego wzorem (3.2).

Udowodnimy najpierw nieograniczoność zbioru słabych rozwiązań układu (3.3). Aby było to czytelniejsze, podzieliliśmy rezultat na trzy części. Zaczniemy od przypadku, gdy liczby n_-, n_+ są parzyste.

Twierdzenie 3.2.1. *Przypuśćmy, że założenia (a1)-(a3) są spełnione oraz liczby n_-, n_+ są parzyste. Ustalmy $\mu_{m_0}\in\mathcal{P}(\Phi)\setminus\{0\}$. Wówczas spójny zbiór słabych rozwiązań układu* (3.3)*, $C(\mu_{m_0})\subset\mathbb{V}\times\mathbb{R}$, jest nieograniczony.*

Dowód. Z twierdzenia 3.1.7 wynika, że $C(\mu_{m_0})\neq\{(0,\mu_{m_0})\}$. Przypuśćmy, że zbiór $C(\mu_{m_0})\subset\mathbb{V}\times\mathbb{R}$ jest ograniczony. Wówczas, na mocy twierdzenia 3.1.7,

(1) $C(\mu_{m_0})\cap(\{0\}\times\mathbb{R})=\{0\}\times\{\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_s}\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})+\ldots+\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})=\Theta$.

Z lematów 3.1.4 i 3.1.5 wynika, że dla dowolnego $j=1,\ldots,s$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})\in U_-(\mathrm{SO}(2))$. Co więcej, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})\neq\Theta\in U(\mathrm{SO}(2))$, zatem istnieje $l_0\in\mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_{l_0}}\neq 0$. Stąd

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{l_0}}+\ldots+\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{l_0}}\leqslant\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_{l_0}}<0,$$

co przeczy równości $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})+\ldots+\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})=\Theta$ i kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że w powyższym dowodzie nie wykorzystywaliśmy struktury przestrzeni własnych operatora Laplace'a–Beltramiego jako SO(2)-reprezentacji, zatem powyższe rozumowanie można powtórzyć w innych układach równań, dla których są prawdziwe twierdzenia 3.1.4 i 3.1.5.

Jeżeli przynajmniej jedna z liczb n_-, n_+ nie jest parzysta, to aby udowodnić nieograniczoność zbioru słabych rozwiązań układu (3.3), wykorzystamy strukturę przestrzeni $\mathcal{H}^n_m$ jako reprezentacji grupy SO(2). Przypomnijmy, że zgodnie z lematem 1.5.10,

$$\mathcal{H}^n_m \approx \mathbb{R}[p^n_m, m] \oplus \bigoplus_{i=0}^{r(n,m)} \mathbb{R}[k_i^{(n,m)}, m_i^{(n,m)}],$$

gdzie $k_0^{(n,m)} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1^{(n,m)}, \ldots, k_{r(n,m)}^{(n,m)} \in \mathbb{N}$, $0 = m_0^{(n,m)} < m_1^{(n,m)} < \ldots < m_{r(n,m)}^{(n,m)} < m$ oraz $p^n_m \geqslant 1$. Oznaczmy $k_0(m) = \dim(\mathcal{H}^n_0)^{\mathrm{SO}(2)} + \ldots + \dim(\mathcal{H}^n_m)^{\mathrm{SO}(2)}$ dla $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz zauważmy, że $k_0(m) = k_0^{(n,0)} + \ldots + k_0^{(n,m)}$.

W poniższym twierdzeniu dowodzimy nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań w przypadku, gdy liczby n_-, n_+ są nieparzyste.

Twierdzenie 3.2.2. *Przypuśćmy, że założenia (a1)-(a3) są spełnione oraz liczby n_-, n_+ są nieparzyste. Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi) \setminus \{0\}$. Wówczas spójny zbiór słabych rozwiązań układu (3.3), $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$, jest nieograniczony.*

Dowód. Z twierdzenia 3.1.7 wynika, że $C(\mu_{m_0}) \neq \{(0, \mu_{m_0})\}$. Przypuśćmy, że zbiór $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest ograniczony, wówczas z twierdzenia 3.1.7 otrzymujemy

(1) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta$.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $|\mu_{i_1}| \leqslant \ldots \leqslant |\mu_{i_s}|$ oraz $\mu_{i_s} > 0$. Zauważmy, że ze wzoru (1.6) otrzymujemy

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H(-\mathrm{Id}, B(\mathcal{H}^n_{i_s})) = \begin{cases} (-1)^{k_0^{(n,i_s)}} & \text{dla } H = \mathrm{SO}(2), \\ (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p^n_{i_s} & \text{dla } H = \mathbb{Z}_{i_s}, \\ 0 & \text{dla } H = \mathbb{Z}_j, \ \text{gdzie } j > i_s. \end{cases}$$

Ze wzoru (1.6) otrzymujemy również

$$\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H(-\mathrm{Id}, B(\dim \mathbb{V}(i_s - 1))) = \begin{cases} (-1)^{k_0(i_s-1)} & \text{dla } H = \mathrm{SO}(2), \\ 0 & \text{dla } H = \mathbb{Z}_j, \ \text{gdzie } j \geqslant i_s \end{cases}$$

oraz

$$\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H\left(-\mathrm{Id}, B\left(\dim \mathbb{V}\left(i_s\right)\right)\right)\Big)^{-1} = \begin{cases} (-1)^{k_0(i_s)} & \text{dla } H = \mathrm{SO}(2), \\ (-1)^{k_0(i_s)} p^n_{i_s} & \text{dla } H = \mathbb{Z}_{i_s}, \\ 0 & \text{dla } H = \mathbb{Z}_j, \ \text{gdzie } j > i_s. \end{cases}$$

Kładąc w lemacie 1.3.8c

$$a_0 = (-1)^{k_0(i_s-1)}, \ a_{i_s} = 0, \ \beta_0 = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}}, \ \beta_{i_s} = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p^n_{i_s}, \ N = n_-,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} &= n_-\left((-1)^{k_0(i_s-1)}\right)^{n_-}\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_--1}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s} \\
&= n_-(-1)^{k_0(i_s-1)}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$.

Ponadto kładąc w lemacie 1.3.8c

$$a_0 = (-1)^{k_0(i_s-1)+1},\ a_{i_s} = (-1)^{k_0(i_s-1)+1}p^n_{i_s},\ \beta_0 = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}},\ \beta_{i_s} = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s},\ N = n_+,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} &= n_+\left((-1)^{k_0(i_s-1)+1}\right)^{n_+-1}(-1)^{k_0(i_s-1)+1}p^n_{i_s}\left(\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_+}-1\right) \\
&+ n_+\left((-1)^{k_0(i_s-1)+1}\right)^{n_+}\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_+-1}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s} \\
&= n_+(-1)^{k_0(i_s-1)+1}p^n_{i_s}\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}-1\right) + n_+(-1)^{k_0(i_s-1)+1}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s} \\
&= n_+(-1)^{k_0(i_s-1)+1}p^n_{i_s}\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}-1+1\right) = n_+(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$.

Rozumując analogicznie, można pokazać, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant s-1$.

Aby ukończyć dowód, pokażemy że równość

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta \qquad (3.6)$$

nie może być spełniona.

Rozważmy 3 przypadki:

1. $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\}\times\mathbb{R}$ w punkcie $(0,\mu_{i_s})$ oraz nie przecina w punkcie $(0,-\mu_{i_s})$. Wówczas ze wzoru (3.4) otrzymujemy

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s} \neq 0.$$

Co więcej, z twierdzeń 1.5.10, 3.1.4 oraz z własności mnożenia w $U(\mathrm{SO}(2))$ otrzymujemy, że dla każdego $1 \leqslant j < s$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$. Stąd

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0,$$

co przeczy (3.6).

2. $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\}\times\mathbb{R}$ w punkcie $(0,-\mu_{i_s})$ oraz nie przecina w punkcie $(0,\mu_{i_s})$. Argumentując tak jak w poprzednim podpunkcie, można pokazać, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0,$$

co przeczy (3.6).

3. $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\}\times\mathbb{R}$ w punktach $(0,-\mu_{i_s})$ i $(0,\mu_{i_s})$. Wówczas korzystając ze wzorów (3.4) i (3.5), otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}}+\ldots+\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}}=\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}}+\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}}\\ =\ & n_-(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s}+n_+(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s}=(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s}(n_-+n_+)\neq 0.\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność z równością (3.6) kończy dowód.

□

Udowodnimy teraz nieograniczoność zbioru rozwiązań w ostatnim możliwym przypadku, to znaczy, gdy liczby n_-, n_+ są różnej parzystości.

Twierdzenie 3.2.3. *Przypuśćmy, że założenia (a1)-(a3) są spełnione oraz n_-, n_+ są różnej parzystości. Ustalmy $\mu_{m_0}\in\mathcal{P}(\Phi)\setminus\{0\}$. Wówczas spójny zbiór słabych rozwiązań układu* (3.3), *$C(\mu_{m_0})\subset\mathbb{V}\times\mathbb{R}$, jest nieograniczony.*

Dowód. Z twierdzenia 3.1.7 wynika, że $C(\mu_{m_0})\neq\{(0,\mu_{m_0})\}$. Przypuśćmy, że zbiór $C(\mu_{m_0})\subset\mathbb{V}\times\mathbb{R}$ jest ograniczony, wówczas z twierdzenia 3.1.7 otrzymujemy

(1) $C(\mu_{m_0})\cap(\{0\}\times\mathbb{R})=\{0\}\times\{\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_s}\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})+\ldots+\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})=\Theta$.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $|\mu_{i_1}|\leqslant\ldots\leqslant|\mu_{i_s}|$ oraz $\mu_{i_s}>0$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H(-\mathrm{Id},B(\mathcal{H}^n_{i_s}))&=\begin{cases}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}} & \text{dla } H=\mathrm{SO}(2),\\ (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s} & \text{dla } H=\mathbb{Z}_{i_s},\\ 0 & \text{dla } H=\mathbb{Z}_j,\ \text{gdzie } j>i_s,\end{cases}\\ \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H(-\mathrm{Id},B(\dim\mathbb{V}(i_s-1)))&=\begin{cases}(-1)^{k_0(i_s-1)} & \text{dla } H=\mathrm{SO}(2),\\ 0 & \text{dla } H=\mathbb{Z}_j,\ \text{gdzie } j\geqslant i_s\end{cases}\end{aligned}$$

oraz

$$\Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg_H(-\mathrm{Id},B(\dim\mathbb{V}(i_s)))\Big)^{-1}=\begin{cases}(-1)^{k_0(i_s)} & \text{dla } H=\mathrm{SO}(2),\\ (-1)^{k_0(i_s)}p^n_{i_s} & \text{dla } H=\mathbb{Z}_{i_s},\\ 0 & \text{dla } H=\mathbb{Z}_j,\ \text{gdzie } j>i_s.\end{cases}$$

Załóżmy, że n_- jest liczbą nieparzystą oraz n_+ jest liczbą parzystą. Kładąc w lemacie 1.3.8c

$$a_0=(-1)^{k_0(i_s-1)},\ a_{i_s}=0,\ \beta_0=(-1)^{k_0^{(n,i_s)}},\ \beta_{i_s}=(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s},\ N=n_-,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}}&=n_-\left((-1)^{k_0(i_s-1)}\right)^{n_-}\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_--1}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s}\\ &=n_-(-1)^{k_0(i_s-1)}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1}p^n_{i_s}\end{aligned}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$. Korzystając z twierdzenia 3.1.5a oraz kładąc w lemacie 1.3.8b $a_0 = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}}$, $a_{i_s} = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n$, $N = n_+$, otrzymujemy

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = n_+ \left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_+-1} (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n = -n_+ p_{i_s}^n$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$.

Rozumując analogicznie, można pokazać, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant s-1$.

Argumentując podobnie jak dowodzie twierdzenia 3.2.2, pokazujemy, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Ponadto

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ &= n_-(-1)^{k_0(i_s-1)}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n - n_+ p_{i_s}^n = p_{i_s}^n \left((-1)^{k_0(i_s)+1} n_- - n_+\right). \end{aligned}$$

Stąd $(-1)^{k_0(i_s)+1} n_- - n_+ = 0$, czyli $n_- = n_+$ albo $n_- = -n_+$, to zaś przeczy założeniu.

Załóżmy, że n_- jest liczbą parzystą oraz n_+ jest liczbą nieparzystą. Korzystając z twierdzenia 3.1.4a oraz kładąc w lemacie 1.3.8b $a_0 = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}}$, $a_{i_s} = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n$, $N = n_-$, otrzymujemy

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = n_- \left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_--1} (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n = -n_- p_{i_s}^n$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$. Kładąc w lemacie 1.3.8c

$$a_0 = (-1)^{k_0(i_s)},\ a_{i_s} = (-1)^{k_0(i_s)} p_{i_s}^n,\ \beta_0 = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}},\ \beta_{i_s} = (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n,\ N = n_+,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} &= n_+ \left((-1)^{k_0(i_s)}\right)^{n_+-1} (-1)^{k_0(i_s)} p_{i_s}^n \left(\left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}}\right)^{n_+} - 1\right) \\ &+ n_+ \left((-1)^{k_0(i_s)}\right)^{n_+} ((-1)^{k_0^{(n,i_s)}})^{n_+-1} (-1)^{k_0^{(n,i_s)}+1} p_{i_s}^n \\ &= n_+(-1)^{k_0(i_s)} p_{i_s}^n \left((-1)^{k_0^{(n,i_s)}} - 1\right) - n_+(-1)^{k_0(i_s)}(-1)^{k_0^{(n,i_s)}} p_{i_s}^n \\ &= -n_+(-1)^{k_0(i_s)} p_{i_s}^n \end{aligned}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$.

Rozumując analogicznie, można pokazać, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant s-1$.

Argumentując tak jak wcześniej, pokazujemy, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Ponadto

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{j_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ &= -n_- p_{i_s}^n - n_+(-1)^{k_0(i_s)} p_{i_s}^n = p_{i_s}^n \left(-n_- + (-1)^{k_0(i_s)+1} n_+\right). \end{aligned}$$

Stąd $-n_- + (-1)^{k_0(i_s)+1} n_+ = 0$, czyli $n_- = -n_+$ albo $n_- = n_+$. Otrzymana sprzeczność z założeniem kończy dowód. $\square$

W następnym wniosku podsumowujemy dotychczasowe wyniki z tego podrozdziału.

Wniosek 3.2.4. *Przypuśćmy, że założenia (a1)-(a3) są spełnione i ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi) \setminus \{0\}$. Wówczas istnieje spójny zbiór słabych rozwiązań układu* (3.3)*, zawierający* $(0, \mu_{m_0}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$*, który jest nieograniczony.*

Zauważmy, że jeżeli $\mu_{m_0} = 0$ oraz liczby n_-, n_+ są tej samej parzystości, to z twierdzenia 3.1.6 wynika, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0) = \Theta$, zatem do badania problemu ograniczoności zbioru rozwiązań $C(0) \subset \{0\} \times \mathbb{R}$ nie można użyć metod z tego rozdziału. Jeżeli natomiast liczby n_-, n_+ są różnej parzystości, to z punktu $(0,0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ bifurkuje zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (3.3), zgodnie z twierdzeniem 3.1.7. Zauważmy, że z powyższego wniosku wynika, że jest on nieograniczony.

Uwaga 3.2.5. *Przypadek $n_- = 1$, $n_+ = 0$ został opisany w pracy [52], natomiast $n_- = 0$, $n_+ = 1$ dowodzi się analogicznie. Powyższy rezultat uogólnia te 2 przypadki.*

Zajmiemy się teraz problemem łamania symetrii grupy $\mathrm{SO}(n)$ słabych rozwiązań układu (3.3). Rozważmy sferę S^{n-1} jako $\mathrm{SO}(n)$-rozmaitość z działaniem zadanym wzorem $(g, x) \mapsto gx$, gdzie $g \in \mathrm{SO}(n)$, $x \in S^{n-1}$. Pokażemy, że każdy punkt $(0, \mu_{m_0}) \in \{0\} \times (\mathcal{P}(\Phi) \setminus \{0\})$ jest punktem globalnej bifurkacji, w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii rozwiązań równania $\nabla_u \Phi(u, \mu) = 0$ (a zatem również słabych rozwiązań układu (3.3)), to znaczy jest punktem bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\nabla_u \Phi(u, \mu) = 0$ oraz istnieje otwarte otoczenie $U \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ punktu $(0, \mu_{m_0})$ takie, że $\mathrm{SO}(n)_{(u,\mu)} \neq \mathrm{SO}(n)$ dla każdego $(u, \mu) \in (U \cap (\nabla_u \Phi)^{-1}(0)) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Twierdzenie 3.2.6. *Przypuśćmy, że założenia (a1)-(a3) są spełnione i ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi) \setminus \{0\}$. Wówczas $(0, \mu_{m_0}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest punktem globalnej bifurkacji, w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii słabych rozwiązań układu* (3.3)*.*

Dowód. Przypomnijmy, że z lematu 3.1.2 wynika, że dla każdego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$

(1) jeżeli $\mu_{m_0} > 0$, to $n_- > 0$, $\mu_{m_0} \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$ oraz $\ker \nabla_u^2 \Phi(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_-} \mathcal{H}_{m_0}^n$,

(2) jeżeli $\mu_{m_0} < 0$, to $n_+ > 0$, $-\mu_{m_0} \in \sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$ oraz $\ker \nabla_u^2 \Phi(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_+} \mathcal{H}_{m_0}^n$.

Jeżeli $m_0 \neq 0$, to, na mocy lematu 3.1.7, $(0, \mu_{m_0})$ jest punktem bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\nabla \Phi(u, \mu) = 0$. Co więcej, $\mathcal{H}_{m_0}^n$ jest nieprzywiedlną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją, zgodnie z twierdzeniem 1.5.11. Zatem $(\mathcal{H}_{m_0}^n)^{\mathrm{SO}(n)} = \{0\}$ i konsekwentnie $\ker \nabla_u^2 \Phi(0, \mu_{m_0})^{\mathrm{SO}(n)} = \{0\}$. Korzystając z twierdzenia 1.2.7, kończymy dowód. □

Zajmiemy się teraz problem ograniczoności zbioru rozwiązań i łamania symetrii dla następującego układ równań:

$$\begin{cases} a_1(\Delta_{S^{n-1}} u_1 + u_1) &= \mu \nabla_{u_1} F(u, \mu), \\ a_2(\Delta_{S^{n-1}} u_2 + u_2) &= \mu \nabla_{u_2} F(u, \mu), \\ &\vdots \\ a_p(\Delta_{S^{n-1}} u_p + u_p) &= \mu \nabla_{u_p} F(u, \mu), \end{cases} \quad \text{na } S^{n-1}, \tag{3.7}$$

gdzie

(b1) $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R})$,

(b2) $\mu \nabla_u F(u,\mu) = \mu u + \nabla_u g(u,\mu)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R})$, dla każdego $u \in \mathbb{R}^p$, $\nabla_u g(u,0) = 0$ i dla każdego $\mu \in \mathbb{R}$, $\nabla_u g(0,\mu) = 0$ oraz $\nabla_u^2 g(0,\mu) = 0$,

(b3) $a_i \in \{-1, 1\}$.

Zdefiniujmy funkcjonał $\Phi_1 \colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi_1(u,\mu) = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{p} -a_i \left(|\nabla u_i(x)|^2 + |u_i(x)|^2 \right) d\sigma - \int\limits_{S^{n-1}} F(u(x),\mu) d\sigma$$

i zauważmy, że

$$\Phi_1(u,\mu) = \sum_{i=1}^{p} \left(-\frac{a_i}{2} ||u_i||^2_{H^1(S^{n-1})} - \frac{\mu}{2} \int\limits_{S^{n-1}} |u_i(x)|^2 d\sigma \right) - \int\limits_{S^{n-1}} g(u(x),\mu) d\sigma.$$

Zauważmy, że funkcjonał Φ_1 i jego gradient mają analogiczne własności do własności funkcjonału Φ i jego gradientu sformułowanych w fakcie 3.1.1, to znaczy

Fakt 3.2.7. *Przy powyższych założeniach:*

$$\begin{aligned} \nabla_u \Phi_1(u,\mu) &= Lu - \mu K(u) - \nabla_u \eta_0(u,\mu) \\ &= (-a_1 u_1 - \mu T u_1, \ldots, -a_m u_m - \mu T u_m) - \nabla_u \eta_0(u,\mu), \end{aligned}$$

gdzie $T \colon H^1(S^{n-1}) \to H^1(S^{n-1})$ *i* $\eta_0 \colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *są zdefiniowane wzorami*

$$\forall_{v \in H^1(S^{n-1})} \quad \langle Tu, v \rangle_{H^1(S^{n-1})} = \int\limits_{S^{n-1}} u(x)v(x) d\sigma, \quad \eta_0(u,\mu) = \int\limits_{S^{n-1}} g(u(x),\mu) d\sigma$$

oraz

(1) $L = -\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_p) \cdot \mathrm{Id} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, ograniczonym* $\mathrm{SO}(2)$*-współzmienniczym operatorem Fredholma,*

(2) $K = (T, \ldots, T) \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, pełnociągłym,* $\mathrm{SO}(2)$*-współzmienniczym operatorem ograniczonym,*

(3) $\nabla_u \eta_0 \colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}$ *jest pełnociągłym,* $\mathrm{SO}(2)$*-współzmienniczym operatorem takim, że* $\nabla_u \eta_0(0,\mu) = 0$, $\nabla_u^2 \eta_0(0,\mu) = 0$ *dla każdego* $\mu \in \mathbb{R}$,

(4) $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{V}$ *jest słabym rozwiązaniem zagadnienia* (3.7) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\nabla_u \Phi_1(u,\mu) = 0$*, to znaczy* u *jest punktem krytycznym funkcjonału* Φ_1.

Zdefiniujmy $\mathcal{P}(\Phi_1) = \{\mu_{m_0} \in \mathbb{R} \colon \nabla_u \Phi_1(0,\mu_{m_0})$ nie jest izomorfizmem$\}$ i zauważmy, że zbiór $\mathcal{P}(\Phi_1)$ nie posiada skończonych punktów skupienia. Co więcej, jeżeli $(0,\mu_{m_0})$ jest punktem bifurkacji słabych rozwiązań równania $\nabla_u \Phi_1(u,\mu) = 0$, to $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_1)$. Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_1)$ oraz zdefiniujmy indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(2))$ równością

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \\ &= \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2 \Phi_1(0,\mu_{m_0}+\epsilon), B(\mathbb{V})\right) - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2 \Phi_1(0,\mu_{m_0}-\epsilon), B(\mathbb{V})\right), \end{aligned}$$

przy czym liczba $\epsilon > 0$ jest odpowiednio mała.

Zauważmy, że jedynym rozwiązaniem układu (3.7) dla $\mu = 0$ jest $u \equiv 0$, zatem 0 nie jest wartością własną równania $-\Delta_{S^{n-1}} u + u = \mu u$ (a zatem $0 \notin \mathcal{P}(\Phi_1)$) oraz równanie $\nabla_u \Phi_1(u, 0) = 0$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $(0, 0)$.

Twierdzenie 3.2.8. *Przypuśćmy, że założenia (b1)-(b3) są spełnione oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_1)$. Wówczas istnieje spójny zbiór słabych rozwiązań układu* (3.7) *zawierający* $(0, \mu_{m_0}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$, *który jest nieograniczony.*

Dowód. Ponieważ $0 \notin \mathcal{P}(\Phi_1)$ oraz jedynym rozwiązaniem równania $\nabla_u \Phi_1(u, 0) = 0$ jest $(0, 0)$, każdy nietrywialny spójny zbiór słabych rozwiązań układu (3.7) nie może przejść przez poziom $\mathbb{V} \times \{0\}$ i konsekwentnie, jeżeli zawiera $(0, \mu_{i_s}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$, nie może zawierać $(0, -\mu_{i_s})$. Postępując tak jak w dowodzie twierdzenia 3.2.2, można pokazać, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0$ oraz jeżeli kontinuum rozwiązań równania $\nabla_u \Phi_1(u, 0) = 0$ przecina zbiór $\mathbb{V} \times \{0\}$ w $\{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$, $|\mu_{i_1}| < \ldots < |\mu_{i_s}|$, to $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$ dla $j = 1, \ldots, s-1$. Zatem

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0,$$

co jest niemożliwe. □

Dowód następującego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.2.6.

Twierdzenie 3.2.9. *Jeżeli $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_1)$, to $(0, \mu_{m_0}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest punktem globalnej bifurkacji, w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii słabych rozwiązań układu* (3.3).

Rozdział 4

Zbiory rozwiązań niekooperatywnych układów równań eliptycznych na kuli geodezyjnej

W tym rozdziale przeniesiemy wyniki z poprzedniego rozdziału na przypadek kuli geodezyjnej $B(x,\alpha) = \{q \in S^n \colon d(x,q) < \alpha\} \subset S^n$, przy czym $d(p,q) = \inf\limits_{\omega} \int_a^b |\omega'(t)| dt$, gdzie $p, q \in S^n$ oraz $\omega \colon [a,b] \to S^n$ są funkcjami ciągłymi, kawałkami klasy C^1 takimi, że $\omega(a) = p$, $\omega(b) = q$. Dla uproszczenia rozważań będziemy rozważać kulę o środku w punkcie $(0,\ldots,0,1)$, to znaczy $B(x,\alpha) = B(\alpha)$. Innymi słowy, scharakteryzujemy zbiory słabych rozwiązań niekooperatywnego układu równań. Co więcej, w układzie równań na $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ scharakteryzujemy punkty globalnej bifurkacji, w których zachodzi zjawisko łamania symetrii. Aby uzyskać powyższe rezultaty, korzystamy ze stopnia silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych. Wyniki z tego rozdziału zostały zawarte w artykule [54]

Będziemy rozważać układy równań z dwoma różnymi warunkami brzegowymi, to znaczy będziemy badać następujące zagadnienia:

$$\begin{cases} a_1 \Delta_{S^n} u_1 &= \nabla_{u_1} F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ a_2 \Delta_{S^n} u_2 &= \nabla_{u_2} F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ & \vdots \\ a_p \Delta_{S^n} u_p &= \nabla_{u_p} F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ u_1 = \ldots &= u_p = 0 \quad\quad\;\; \text{na} \quad \partial B(\alpha) \end{cases} \tag{4.1}$$

oraz

$$\begin{cases} a_1 \Delta_{S^n} u_1 &= \nabla_{u_1} F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ a_2 \Delta_{S^n} u_2 &= \nabla_{u_2} F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ & \vdots \\ a_p \Delta_{S^n} u_p &= \nabla_{u_p} F(u,\mu) \quad \text{w} \quad B(\alpha), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \ldots &= \frac{\partial u_p}{\partial \nu} = 0 \quad\quad\;\; \text{na} \quad \partial B(\alpha), \end{cases} \tag{4.2}$$

przy czym

(a1) $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, (a2) $\nabla_u F(u,\mu) = \mu u + \nabla_u g(u,\mu)$, gdzie $g \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ i dla każdego $\mu \in \mathbb{R}$ zachodzi $\nabla_u g(0,\mu) = 0$ oraz $\nabla_u^2 g(0,\mu) = 0$,

(a3) istnieje $C > 0$ oraz $1 \leqslant p < (n+2)(n-2)^{-1}$ takie, że $|\nabla_u^2 F(u,\mu)| \leqslant C(1+|u|^{p-1})$ (w przypadku $n = 2$ zakładamy, że $p \in [1,+\infty)$),

(a4) $a_i \in \{-1, 1\}$.

Przez n_- oznaczać będziemy liczbę tych elementów a_i, $i = 1,\ldots,p$, dla których $a_i = -1$, a przez n_+ - dla których $a_i = 1$.

4.1 Układ równań z warunkiem brzegowym Dirichleta

4.1.1 Preliminaria

W tym podrozdziale podamy podstawowe własności funkcjonału związanego z zagadnieniem (4.1). Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^p H_0^1(B(\alpha))$. Ponieważ przestrzeń $H_0^1(B(\alpha))$ jest ortogonalną SO(n)-reprezentacją, to, zgodnie z lematem 1.2.2, przestrzeń $\mathbb{V}$ również jest ortogonalną SO(n)-reprezentacją.

Zdefiniujmy funkcjonał $\Phi_D\colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi_D(u,\mu) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(\alpha)} \sum_{i=1}^p \left(-a_i |\nabla u_i(x)|^2\right) d\sigma - \int\limits_{B(\alpha)} F(u(x),\mu)\, d\sigma \tag{4.3}$$

oraz zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\Phi_D(u,\mu) &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} \int\limits_{B(\alpha)} \left(-a_i |\nabla u_i(x)|^2\right) d\sigma - \frac{\mu}{2} \int\limits_{B(\alpha)} |u(x)|^2 d\sigma - \int\limits_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)\, d\sigma \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p a_i ||u_i||^2_{H_0^1(B(\alpha))} - \frac{\mu}{2} \int\limits_{B(\alpha)} |u_i(x)|^2 d\sigma - \int\limits_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator $T\colon H_0^1(B(\alpha)) \to H_0^1(B(\alpha))$ oraz rodzinę funkcjonałów $\eta_0\colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorami

$$\forall_{v \in H_0^1(B(\alpha))} \ \ \langle Tu, v\rangle_{H_0^1(B(\alpha))} = \int\limits_{B(\alpha)} u(x)v(x)d\sigma, \quad \eta_0(u,\mu) = \int\limits_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)d\sigma.$$

Z powyższych obliczeń oraz z własności operatora Laplace'a–Beltramiego wynika następujący fakt:

Fakt 4.1.1. *Przy powyższych założeniach zachodzi następująca formuła:*

$$\begin{aligned}
\nabla_u \Phi_D(u,\mu) &= Lu - \mu K(u) - \nabla_u \eta_0(u,\mu) \\
&= (-a_1 u_1 - \mu T u_1, \ldots, -a_p u_p - \mu T u_p) - \nabla_u \eta_0(u,\mu),
\end{aligned}$$

gdzie

(1) $L = -\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_p) \cdot \mathrm{Id}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, ograniczonym* $\mathrm{SO}(n)$*-współzmienniczym operatorem Fredholma,*

(2) $K = (T, \ldots, T)\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, pełnociągłym,* $\mathrm{SO}(n)$*-współzmienniczym operatorem ograniczonym,*

(3) $\nabla_u \eta_0\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R} \to \mathbb{V}$ *jest pełnociągłym,* $\mathrm{SO}(n)$*-współzmienniczym operatorem takim, że* $\nabla_u \eta_0(0, \mu) = 0$*,* $\nabla_u^2 \eta_0(0, \mu) = 0$ *dla każdego* $\mu \in \mathbb{R}$*,*

(4) $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{V}$ *jest słabym rozwiązaniem zagadnienia* (4.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\nabla_u \Phi_D(u, \mu) = 0$*, to znaczy* u *jest punktem krytycznym funkcjonału* Φ_D*.*

Zauważmy, że z powyższego faktu wynika, iż operator $\nabla_u \Phi_D$ jest $\mathrm{SO}(n)$-współzmienniczy.
Połóżmy $\mathcal{P}(\Phi_D) = \{\mu_{m_0} \in \mathbb{R}\colon \nabla_u^2 \Phi_D(0, \mu_{m_0})$ nie jest izomorfizmem$\}$. Przypomnijmy, że przez $\sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) = \{0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots\}$ oznaczamy spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na kuli geodezyjnej $B(\alpha)$ oraz $\sigma_D^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) = \{-\mu_m\colon \mu_m \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\}$. Z definicji funkcjonału Φ_D oraz z faktu 4.1.1 wynika następujący lemat:

Lemat 4.1.2. *Przy powyższych założeniach*

(1) $\mathcal{P}(\Phi_D) = \begin{cases} \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)), & \text{gdy } n_- > 0, n_+ = 0, \\ \sigma_D^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)), & \text{gdy } n_+ > 0, n_- = 0, \\ \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) \cup \sigma_D^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)), & \text{gdy } n_- > 0, n_+ > 0, \end{cases}$

(2) $\sigma(K) = \left\{\frac{1}{\mu_m}\colon \mu_m \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))\right\}$,

(3) $V_K\left(\frac{1}{\mu_m}\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$ *dla dowolnego* $m \in \mathbb{N}$*.*

Ponadto jeżeli $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$*, to*

(4) jeżeli $\mu_{m_0} > 0$*, to* $n_- > 0$*,* $\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))$ *i* $\ker \nabla^2 \Phi_D(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_-} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$*,*

(5) jeżeli $\mu_{m_0} < 0$*, to* $n_+ > 0$*,* $-\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))$ *i* $\ker \nabla^2 \Phi_D(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_+} V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$*.*

W poniższym twierdzeniu formułujemy warunek konieczny istnienia bifurkacji w zadanym punkcie.

Twierdzenie 4.1.3. *Zbiór* $\mathcal{P}(\Phi_D)$ *nie ma skończonych punktów skupienia. Ponadto jeżeli punkt* $(0, \mu_{m_0})$ *jest punktem bifurkacji rozwiązań równania* $\nabla_u \Phi_D(u, \mu) = 0$*, to* $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$*.*

Powyższe twierdzenie wynika z własności spektralnych operatora $-\Delta_{S^n}$ oraz z twierdzenia o funkcji uwikłanej.
Zdefiniujmy ciąg $\mathrm{SO}(n)$-współzmienniczych rzutów ortogonalnych $\Gamma = \{\tau_k\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}\colon k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ następująco:

(1) $\mathbb{V}^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}^k = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{V}_j$, gdzie $\mathbb{V}_j = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_j)$ dla $k \in \mathbb{N}$,

(3) $\tau_k \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest rzutem takim, że $\operatorname{im} \tau_k = \mathbb{V}^k$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Z definicji Γ oraz z własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a–Beltramiego wynika, że jest to $\mathrm{SO}(n)$-niezmienniczy schemat aproksymacyjny na $\mathbb{V}$. Ponadto $\ker L = \mathbb{V}^0$ oraz dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi $\tau_k \circ L = L \circ \tau_k$.

Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$ oraz zdefiniujmy $\mathrm{SO}(n)$-indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(n))$ równością

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \\ =\ &\nabla_{\mathrm{SO}(n)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_D(0, \mu_{m_0} + \epsilon), B(\mathbb{V})\right) - \nabla_{\mathrm{SO}(n)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_D(0, \mu_{m_0} - \epsilon), B(\mathbb{V})\right), \end{aligned}$$

przy czym liczba $\epsilon > 0$ jest odpowiednio mała. Z faktu 4.1.3 wynika, że powyższa definicja jest poprawna. Postępując analogicznie, możemy zdefiniować $\mathrm{SO}(2)$-indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(2))$ dla $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$ wzorem

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \\ =\ &\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_D(0, \mu_{m_0} + \epsilon), B(\mathbb{V})\right) - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_D(0, \mu_{m_0} - \epsilon), B(\mathbb{V})\right) \end{aligned}$$

o współrzędnych

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathrm{SO}(n)}, \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_1}, \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_2}, \ldots\right).$$

Zauważmy, że naturalne włożenie grup $i\colon \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(n)$ indukuje homomorfizm pierścieni $i^*\colon U(\mathrm{SO}(n)) \to U(\mathrm{SO}(2))$ taki, że $i^*(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0})) = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})$ dla $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$. Połóżmy $\mathbb{V}(m_0) = \bigoplus_{i=1}^{m_0} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_i)$ oraz $\mathbb{V}(0) = \{0\}$.

Dowody poniższych lematów są analogiczne do dowodów lematów 3.1.4 i 3.1.5, dlatego je pomijamy.

Lemat 4.1.4. *Załóżmy, że $n_- > 0$ oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$. Wówczas*

$$\begin{aligned} \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) &= \left(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(m_0-1)))\right)^{n_-} \\ &\star \left((\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}))))^{n_-} - \mathbb{I}\right). \end{aligned}$$

Ponadto

(a) jeżeli n_- jest liczbą parzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_-} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(b) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ *oraz $n_- \cdot \dim \mathbb{V}(m_0-1)$ są liczbami parzystymi, to*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_-} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(c) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ *jest liczbą parzystą oraz $n_- \cdot \dim \mathbb{V}(m_0-1)$ jest liczbą nieparzystą, to*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \mathbb{I} - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_-} \in U_+(\mathrm{SO}(2)).$$

Lemat 4.1.5. *Załóżmy, że $n_+ > 0$ i ustalmy $\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$. Wówczas*

$$\begin{aligned} \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{m_0}) &= \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(m_0)))\Big)^{-n_+} \\ &\star \Big((\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}))))^{n_+} - \mathbb{I}\Big). \end{aligned}$$

Ponadto

(a) jeżeli n_+ jest liczbą parzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}))))^{n_+} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(b) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ oraz $n_+ \cdot \dim \mathbb{V}(m_0)$ są liczbami parzystymi, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_+} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(c) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest liczbą parzystą oraz $n_+ \cdot \dim \mathbb{V}(m_0)$ jest liczbą nieparzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \mathbb{I} - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_+} \in U_+(\mathrm{SO}(2)).$$

Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathbb{R}$ i oznaczmy przez $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ składową spójności zbioru

$$\mathrm{cl}\,\{(u, \mu) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} \colon \nabla_u \Phi_D(u, \mu) = 0, u \neq 0\},$$

zawierającą $(0, \mu_{m_0})$. Stosując niezmienniczą alternatywę Rabinowitza do układu (4.1), otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.1.6. *Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$. Jeżeli jeden z poniższych warunków jest spełniony*

(i) $\mu_{m_0} > 0$ i $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją lub $n_- \cdot \dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest liczbą nieparzystą,

(ii) $\mu_{m_0} < 0$ i $V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją lub $n_+ \cdot \dim V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$ jest liczbą nieparzystą,

to $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem nieograniczonym albo

(1) $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem ograniczonym,

(2) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots \mu_{i_s}\}$,

(3) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$.

Szkic dowodu powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy [23]. Zauważmy, że dla ustalonego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$, założenia powyższego twierdzenia implikują, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$, vide [19].

4.1.2 Zbiory rozwiązań oraz łamanie symetrii

W tym podrozdziale zbadamy zbiory słabych rozwiązań zagadnienia (4.1). Rozważymy najpierw przypadek kuli geodezyjnej o promieniu $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Okazuje się, że przy tym założeniu, z każdego punktu $(0, \mu_m) \in \{0\} \times (\mathcal{P}(\Phi_D) \setminus \{\pm\mu_1\})$ bifurkuje spójny zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (4.1), który jest nieograniczony. Ponadto jeżeli n_- (odpowiednio n_+) jest liczbą nieparzystą, to z punktu $(0, \mu_1)$ (odpowiednio $(0, -\mu_1)$) również bifurkuje zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (4.1), który jest nieograniczony. Co więcej, jeżeli m jest liczbą parzystą, to w punktach $(0, \mu_m) \in \{0\} \times \mathcal{P}(\Phi_D)$ zachodzi zjawisko łamania symetrii.

Oznaczmy $d(m) = \dim \mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)^{\mathrm{SO}(2)}$ oraz $k_0(m) = d(1) + \ldots + d(m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. W poniższym twierdzeniu dowodzimy nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań zagadnienia (4.1) rozważanego na kuli geodezyjnej $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Twierdzenie 4.1.7. *Załóżmy, że $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D) \setminus \{\pm\mu_1\}$. Wówczas zbiór słabych rozwiązań zagadnienia* (4.1)*, $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$, jest nieograniczony.*

Dowód. Z wniosku 1.5.15 oraz z twierdzenia 1.5.11 wynika, że założenia twierdzenia 4.1.6 są spełnione, zatem $C(\mu_{m_0}) \neq \{(0, \mu_{m_0})\}$. Przypuśćmy, że zbiór $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest ograniczony. Wówczas

(1) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & i^*\Big(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s})\Big) = i^*\Big(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})\Big) + \ldots + i^*\Big(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})\Big) \\ = \; & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $|\mu_{i_1}| \leqslant \ldots \leqslant |\mu_{i_s}|$ oraz $\mu_{i_s} > 0$.

1. Załóżmy, że liczby n_-, n_+ są parzyste. Z lematów 4.1.4 i 4.1.5 wynika, że dla dowolnego $j = 1, \ldots, s$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j}) \in U_-(\mathrm{SO}(2))$. Co więcej, ponieważ $\mathcal{H}^n_{m_0-1} \subset \mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ oraz $m_0 \neq 1$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(2))$, zatem istnieje $l_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_{l_0}} \neq 0$. Stąd

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{l_0}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{l_0}} \leqslant \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_{l_0}} < 0,$$

   co przeczy równości (4.4).

2. Załóżmy, że liczby n_-, n_+ są nieparzyste. Postępując tak jak w dowodzie twierdzenia 3.2.2, można uzasadnić, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = n_+(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1} \tag{4.6}$$

   oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ i $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s - 1$. Co więcej, dla $1 \leqslant j \leqslant s-2$ zachodzi $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = 0$. Rozważmy 3 przypadki:

(i) $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punkcie $(0, \mu_{i_s})$ oraz nie przecina w punkcie $(0, -\mu_{i_s})$. Wówczas ze wzoru (4.5) otrzymujemy

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1} \neq 0.$$

Co więcej, z twierdzeń 1.5.10, 4.1.4 oraz z własności mnożenia w $U(\mathrm{SO}(2))$ otrzymujemy, że dla każdego $1 \leqslant j < s$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = 0$. Stąd

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \neq 0,$$

co przeczy (4.4).

(ii) $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punkcie $(0, -\mu_{i_s})$ oraz nie przecina w punkcie $(0, \mu_{i_s})$. Argumentując tak jak w poprzednim podpunkcie, można pokazać, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0,$$

co przeczy (4.4).

(iii) $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\}\times\mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Wówczas, korzystając ze wzorów (4.5) i (4.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \\ = \; & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \\ = \; & n_-(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1} + n_+(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1} = (-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1} (n_- + n_+) \neq 0, \end{aligned}$$

co przeczy (4.4).

3. Załóżmy, że n_- jest liczbą nieparzystą oraz n_+ jest liczbą parzystą.

   Postępując tak jak w dowodzie twierdzenia 3.2.3, można uzasadnić, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1}, \quad \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = -n_+ p^n_{i_s-1}$$

   oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ i $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s - 1$. Co więcej, dla $1 \leqslant j \leqslant s-2$ zachodzi $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = 0$. Argumentując tak jak wcześniej, pokazujemy, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Ponadto

$$\begin{aligned} & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \\ = \; & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \\ = \; & n_-(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s-1} - n_+ p^n_{i_s-1} = p^n_{i_s-1} \left((-1)^{k_0(i_s)+1} n_- - n_+ \right). \end{aligned}$$

   Stąd $(-1)^{k_0(i_s)+1} n_- - n_+ = 0$, czyli $n_- = n_+$ albo $n_- = -n_+$, to zaś przeczy założeniu.

4. Załóżmy, że n_- jest liczbą parzystą oraz n_+ jest liczbą nieparzystą. Postępując tak jak wcześniej, można pokazać, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = -n_- p^n_{i_s-1}, \quad \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = -n_+(-1)^{k_0(i_s)} p^n_{i_s-1}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ i $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s - 1$. Co więcej, dla $1 \leqslant j \leqslant s-2$ zachodzi $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} = 0$. Argumentując tak jak wcześniej, pokazujemy, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Ponadto

$$\begin{aligned} & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{j_1})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \\ = \ & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s-1}} \\ = \ & -n_- p^n_{i_s-1} - n_+(-1)^{k_0(i_s)} p^n_{i_s-1} = p^n_{i_s-1}\left(-n_- + (-1)^{k_0(i_s)+1} n_+\right). \end{aligned}$$

Stąd $-n_- + (-1)^{k_0(i_s)+1} n_+ = 0$, czyli $n_- = -n_+$ albo $n_- = n_+$. Otrzymana sprzeczność z założeniem kończy dowód.

□

W powyższym dowodzie korzystaliśmy ze struktury przestrzeni własnych $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{i_s})$, w szczególności z własności $\mathcal{H}^n_{i_s-1} \subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{i_s})$ oraz $\mathcal{H}^n_{i_s-1} \not\subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{\tilde{m}})$ dla każdych $0 < \tilde{m} < i_s$, vide wniosek 1.5.15. Ponieważ nie jest to prawdą dla dowolnego $\alpha \in (0, \pi)$, metoda z powyższego dowodu nie może być zastosowana w ogólnym przypadku.

W poniższym twierdzeniu opisujemy zbiory rozwiązań bifurkujące z punktów $(0, \pm\mu_1) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.1.8. *Jeżeli n_- jest liczbą nieparzystą, to zbiór $C(\mu_1)$ jest nieograniczony. Jeżeli n_+ jest liczbą nieparzystą, to zbiór $C(-\mu_1)$ jest nieograniczony.*

Dowód. Załóżmy, że n_- jest liczbą nieparzystą, wówczas z twierdzenia 4.1.6 wynika, że zbiór $C(\mu_1)$ jest nieograniczony albo jest ograniczony i, na mocy twierdzenia 4.1.7, przecina oś $\{0\} \times \mathbb{R}$ jedynie w punkcie $(0, -\mu_1)$. Ponadto $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_1) + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(-\mu_1) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$ oraz

$$i^*\left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_1) + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(-\mu_1)\right) = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_1) + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_1) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)).$$

Co więcej, ponieważ $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_1) = \mathcal{H}^n_0$, to z twierdzeń 4.1.4, 4.1.5 oraz lematu 1.5.10 wynika, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_1)_H = \begin{cases} -2, & \text{gdy } H = \mathrm{SO}(2), \\ 0, & \text{gdy } H \neq \mathrm{SO}(2), \end{cases}$$

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_1)_H = \begin{cases} (-1)^{n_+} - 1, & \text{gdy } H = \mathrm{SO}(2), \\ 0, & \text{gdy } H \neq \mathrm{SO}(2). \end{cases}$$

Zatem

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_1)_{\mathrm{SO}(2)} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_1)_{\mathrm{SO}(2)} = -2 + (-1)^{n_+} - 1 = -3 + (-1)^{n_+} \neq 0.$$

Stąd otrzymujemy $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_1) + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_1) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(2))$, to znaczy zbiór $C(\mu_1)$ nie może być ograniczony.

Postępując analogicznie, można pokazać, że jeżeli n_+ jest liczbą nieparzystą, to zbiór $C(-\mu_1)$ jest nieograniczony. □

Zauważmy, że jeżeli n_- i n_+ są liczbami parzystymi, to, ponieważ $\mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_1) = \mathcal{H}_0^n$, zgodnie z wnioskiem 1.5.15 oraz $\mathcal{H}_0^n$ jest trywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją, vide twierdzenie 1.5.11, otrzymujemy, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\pm\mu_1) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$ oraz założenia twierdzenia 4.1.6 nie są spełnione i powyższe rozumowanie nie może być przeniesione na ten przypadek.

W poniższym twierdzeniu charakteryzujemy punkty bifurkacji słabych rozwiązań układu (4.1), w których zachodzi zjawisko łamania symetrii.

Twierdzenie 4.1.9. *Załóżmy, że $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$. Jeżeli $m_0 \in \mathbb{Z}$ jest liczbą parzystą, to punkt $(0, \mu_{m_0})$ jest punktem globalnej bifurkacji słabych rozwiązań problemu (4.1), w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii.*

Dowód. Z twierdzenia 4.1.7 otrzymujemy, że punkt $(0, \mu_{m_0})$ jest punktem bifurkacji globalnej rozwiązań równania $\nabla_u \Phi_D(u, \mu) = 0$. Ponadto z lematu 4.1.2 wynika, że dla dowolnego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_D)$ mamy

(1) jeżeli $\mu_{m_0} > 0$, to $n_- > 0$, $\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))$ i $\ker \nabla^2 \Phi_D(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_-} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$,

(2) jeżeli $\mu_{m_0} < 0$, to $n_+ > 0$, $-\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))$ i $\ker \nabla^2 \Phi_D(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_+} V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$.

Co więcej, z wniosku 1.5.15 oraz z parzystości m_0 mamy $\mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}) = \mathcal{H}_1^n \oplus \mathcal{H}_3^n \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{m_0-1}^n$ oraz, dla $l = 1, 3, \ldots, m_0 - 1$, $\mathcal{H}_l^n$ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy $\mathrm{SO}(n)$, zgodnie z twierdzeniem 1.5.11, zatem $(\mathcal{H}_l^n)^{\mathrm{SO}(n)} = \{0\}$ oraz $\ker \nabla_u^2 \Phi_D(0, \mu_{m_0})^{\mathrm{SO}(n)} = \{0\}$. Korzystając z twierdzenia 1.2.7, kończymy dowód. □

Od tej pory będziemy rozważać zagadnienie (4.1) na dowolnej kuli geodezyjnej $B(\alpha) \subset S^n$, gdzie $\alpha \in (0, \pi)$. Ponieważ w tym przypadku nie jest znana dokładna struktura przestrzeni własnych jako reprezentacji grupy $\mathrm{SO}(2)$, nie można zastosować metod z dowodu twierdzenia 4.1.7, zaś uzyskane wyniki są mniej ogólne niż w przypadku kuli $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Twierdzenie 4.1.10. *Ustalmy $l \in \mathbb{N}$ oraz $\mu_{m_0} \in A_l$.*

1. *Jeżeli $n_- > 0$ jest liczbą parzystą oraz zbiór $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ słabych rozwiązań zagadnienia (4.1) jest ograniczony, to $n_+ > 0$ jest liczbą nieparzystą oraz*

$$C(\mu_{m_0}) \cap \{(0, \mu) \in \mathbb{V} \times (-\infty, 0) \colon -\mu \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\} \neq \emptyset.$$

2. *Jeżeli $n_+ > 0$ jest liczbą parzystą oraz zbiór $C(-\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ słabych rozwiązań zagadnienia (4.1) jest ograniczony, to $n_- > 0$ jest liczbą nieparzystą oraz*

$$C(-\mu_{m_0}) \cap \{(0, \mu) \in \mathbb{V} \times (0, \infty) \colon \mu \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\} \neq \emptyset.$$

Dowód. Ponieważ $\mu_{m_0} \in A_l$ oraz $l \neq 0$, $\mathcal{H}_l^n \subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$, zatem $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$ oraz $C(\mu_{m_0}) \neq \{(0, \mu_{m_0}\}$. Z twierdzenia 4.1.6 otrzymujemy, że

(1) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{(0, \mu_{i_1}), \ldots, (0, \mu_{i_s})\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$.

Ponadto,

$$i^*\left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0})\right) = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)) \tag{4.7}$$

oraz

$$\begin{aligned} & i^*\left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s})\right) = i^*\left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})\right) + \ldots + i^*\left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})\right) \\ = \ & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Przypuśćmy, przeciwnie do tezy twierdzenia, że zbiór $C(\mu_{m_0})$ jest ograniczony oraz spełniony jest jeden z warunków

(i) $n_+ = 0$,

(ii) $C(\mu_{m_0}) \cap \{(0,\mu) \in \mathbb{V} \times (-\infty, 0)\colon -\mu \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\} = \emptyset$,

(iii) $n_+ > 0$ jest liczbą parzystą.

Rozważmy przypadek (i). Z lematu 4.1.4 wynika, że dla $j = 1, \ldots, s$ wszystkie współrzędne indeksów $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})$ są niedodatnie, a ze wzoru (4.7) wnioskujemy, że co najmniej jedna współrzędna indeksu $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})$ jest niezerowa, zatem

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)),$$

co jest sprzeczne z (4.8).

Postępując analogicznie oraz korzystając z lematu 4.1.5 w przypadku (iii), dowodzimy sprzeczności w pozostałych przypadkach. To dowodzi pierwszej części twierdzenia, postępując analogicznie, dowodzimy drugą część. □

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że, zgodnie z twierdzeniem 1.5.13, liczba elementów zbioru $A_l \cap ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)]$ jest mniejsza lub równa 1. Co więcej, z własności wartości własnych wynika, że zbiór $((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)]$ przecina się niepusto jedynie ze skończoną liczbą zbiorów A_l. Jeżeli zbiór $\{l\colon A_l \cap ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)] \neq \emptyset\}$ jest niepusty, to kładziemy

$$\tilde{l}(k) = \max\{l\colon A_l \cap ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)] \neq \emptyset\},$$

w przeciwnym wypadku $\tilde{l}(k) = 0$.

Twierdzenie 4.1.11. *Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli $\tilde{l}(k) \neq 0$, to istnieje liczba*

$$\tilde{\mu}(k) \in A_{\tilde{l}(k)} \cap ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)]$$

taka, że z punktu $(0, \tilde{\mu}(k))$ bifurkuje spójny zbiór słabych rozwiązań $C(\tilde{\mu}(k))$ zagadnienia (4.1), który jest nieograniczony albo

(1) $C(\tilde{\mu}(k)) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem ograniczonym,

(2) $C(\tilde{\mu}(k)) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(3) $C(\tilde{\mu}(k)) \cap (\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)])) \neq \emptyset$,

(4) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$.

Dowód. Zauważmy, że z założenia $\tilde{l}(k) \neq 0$ wynika, że $\mathcal{H}^n_{\tilde{l}(k)}$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją. Ponadto $\mathcal{H}^n_{\tilde{l}(k)} \subset \mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\tilde{\mu}(k))$, zatem $\mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\tilde{\mu}(k))$ również jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją. Stąd wynika, że są spełnione założenia twierdzenia 4.1.6, zatem z punktu $(0, \tilde{\mu}(k))$ bifurkuje spójny zbiór $C(\tilde{\mu}(k)) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że jest on ograniczony, wówczas

(1) $C(\tilde{\mu}(k)) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$. Ponadto

$$\begin{aligned} i^* \left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s})\right) &= i^* \left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})\right) + \ldots + i^* \left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})\right) \\ &= \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)). \end{aligned}$$

Pokażemy, że

$$C\left(\tilde{\mu}(k)\right) \cap \left(\{0\} \times \left(\mathbb{R} \setminus ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)]\right)\right) \neq \emptyset.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy $\mu_{i_j} \in A_{i_j} \cap ((k-1)(n+k-2), k(n+k-1)]$ dla $j = 1, \ldots, s$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $\mu_{i_s} = \tilde{\mu}(k)$, zatem $i_s > i_j$ dla $j = 1, \ldots, s-1$. Stąd $\mathcal{H}^n_{i_s} \not\subset \mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{i_j})$ dla $j = 1, \ldots, s-1$. Zauważmy, że z lematu 1.5.10 wynika, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0$ oraz, dla każdego $j = 1, \ldots, s-1$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$, zatem

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \neq 0.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Zauważmy, że dowolna kula geodezyjna jest w sensie topologicznym podobna do kuli $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, dlatego można oczekiwać, że twierdzenia o nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań i łamaniu symetrii powinny się przenieść na ten przypadek. Ponieważ jednak nie jest znana struktura podprzestrzeni własnych jako reprezentacji grup $\mathrm{SO}(n)$ i $\mathrm{SO}(2)$, metody wykorzystane w dowodzie wcześniejszych twierdzeń nie działają w ogólnym przypadku, zaś sam problem pozostaje otwarty.

4.2 Układ równań z warunkiem brzegowym Neumanna

4.2.1 Preliminaria

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem (4.2). Przypuśćmy, że są spełnione założenia (a1)-(a4). Tak samo jak wcześniej, przez n_- oznaczać będziemy liczbę tych elementów a_i, $i = 1, \ldots, p$, dla których $a_i = -1$, a przez n_+ - dla których $a_i = 1$.

Zdefiniujmy funkcjonał $\Phi_N \colon \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi_N(u, \mu) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(\alpha)} \sum_{i=1}^{p} \left(-a_i |\nabla u_i(x)|^2\right) d\sigma - \int\limits_{B(\alpha)} F(u(x), \mu) d\sigma \tag{4.9}$$

oraz zauważmy, że

$$\Phi_N(u,\mu) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\int_{B(\alpha)}\left(-a_i|\nabla u_i(x)|^2\right)d\sigma - \frac{\mu}{2}\int_{B(\alpha)}|u_i(x)|^2 d\sigma\right) - \int_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\int_{B(\alpha)}\left(-a_i\left(|\nabla u_i(x)|^2+|u_i(x)|^2\right)\right)d\sigma - \frac{\mu-a_i}{2}\int_{B(\alpha)}|u_i(x)|^2 d\sigma\right) - \int_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left(-\frac{a_i}{2}||u_i||^2_{H^1(B(\alpha))} - \frac{\mu-a_i}{2}\int_{B(\alpha)}|u_i(x)|^2 d\sigma\right) - \int_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)d\sigma.$$

Zdefiniujmy operator $T\colon H^1(B(\alpha)) \to H^1(B(\alpha))$ oraz rodzinę funkcjonałów $\eta_0\colon \mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorami

$$\forall_{v\in H^1(B(\alpha))}\ \ \langle Tu,v\rangle_{H^1(B(\alpha))} = \int_{B(\alpha)} u(x)v(x)d\sigma,\quad \eta_0(u,\mu) = \int_{B(\alpha)} g(u(x),\mu)d\sigma.$$

Z powyższych obliczeń oraz z własności operatora Laplace'a–Beltramiego wynika następujący fakt:

Fakt 4.2.1. *Przy powyższych założeniach zachodzi następująca formuła:*

$$\begin{aligned}\nabla_u\Phi_N(u,\mu) &= Lu - (\mu\operatorname{Id}+L)K(u) - \nabla_u\eta_0(u,\mu)\\ &= (-a_1u_1-(\mu-a_1)Tu_1,\ldots,-a_pu_p-(\mu-a_p)Tu_p) - \nabla_u\eta_0(u,\mu),\end{aligned}$$

gdzie

(1) $L = -\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_p)\cdot\operatorname{Id}\colon\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, ograniczonym* $\mathrm{SO}(n)$*-współzmienniczym operatorem Fredholma,*

(2) $K=(T,\ldots,T)\colon\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ *jest samosprzężonym, pełnociągłym,* $\mathrm{SO}(n)$*-współzmienniczym operatorem ograniczonym,*

(3) $\nabla_u\eta_0\colon\mathbb{V}\times\mathbb{R}\to\mathbb{V}$ *jest pełnociągłym,* $\mathrm{SO}(n)$*-współzmienniczym operatorem takim, że* $\nabla_u\eta_0(0,\mu)=0$, $\nabla_u^2\eta_0(0,\mu)=0$ *dla każdego* $\mu\in\mathbb{R}$*,*

(4) $u=(u_1,\ldots,u_p)\in\mathbb{V}$ *jest słabym rozwiązaniem zagadnienia* (4.2) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\nabla_u\Phi_N(u,\mu)=0$*, to znaczy* u *jest punktem krytycznym funkcjonału* Φ_N*.*

Zauważmy, że z powyższego faktu wynika, iż operator $\nabla_u\Phi_N$ jest $\mathrm{SO}(n)$-współzmienniczy.

Połóżmy $\mathcal{P}(\Phi_N) = \{\mu_{m_0}\in\mathbb{R}\colon \nabla_u^2\Phi_N(0,\mu_{m_0})$ nie jest izomorfizmem$\}$. Przypomnijmy, że przez $\sigma_N(-\Delta_{S^n};B(\alpha)) = \{0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\ldots\}$ oznaczamy spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego na kuli geodezyjnej $B(\alpha)$ oraz $\sigma_N^-(-\Delta_{S^n};B(\alpha)) = \{-\mu_m\colon \mu_m\in\sigma_N(-\Delta_{S^n};B(\alpha))\}$. Z definicji funkcjonału Φ_N oraz z faktu 4.2.1 wynika następujący lemat:

Lemat 4.2.2. *Przy powyższych założeniach*

(1) $\mathcal{P}(\Phi_N) = \begin{cases} \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)), & \textit{gdy } n_- > 0, n_+ = 0, \\ \sigma_N^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)), & \textit{gdy } n_+ > 0, n_- = 0, \\ \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)) \cup \sigma_N^-(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)), & \textit{gdy } n_- > 0, n_+ > 0, \end{cases}$

(2) $\sigma(K) = \left\{\frac{1}{\mu_m+1} : \mu_m \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))\right\}$,

(3) $V_K\left(\frac{1}{\mu_m+1}\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$ *dla dowolnego* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ponadto jeżeli $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$*, to*

(4) jeżeli $\mu_{m_0} > 0$*, to* $n_- > 0$*,* $\mu_{m_0} \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))$ *i* $\ker \nabla^2\Phi_N(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_-} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$,

(5) jeżeli $\mu_{m_0} < 0$*, to* $n_+ > 0$*,* $-\mu_{m_0} \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}, B(\alpha))$ *i* $\ker \nabla^2\Phi_N(0, \mu_{m_0}) = \bigoplus_{i=1}^{n_+} V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$.

W poniższym twierdzeniu formułujemy warunek konieczny istnienia bifurkacji w zadanym punkcie.

Twierdzenie 4.2.3. *Zbiór* $\mathcal{P}(\Phi_N)$ *nie ma skończonych punktów skupienia. Ponadto jeżeli punkt* $(0, \mu_{m_0})$ *jest punktem bifurkacji rozwiązań równania* $\nabla_u\Phi_N(u, \mu) = 0$*, to* $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$.

Powyższe twierdzenie wynika z własności spektralnych operatora $-\Delta_{S^n}$ oraz z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Zdefiniujmy ciąg SO(n)-współzmienniczych rzutów ortogonalnych $\Gamma = \{\tau_k \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V} \colon k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ następująco:

(1) $\mathbb{V}^0 = \{0\}$,

(2) $\mathbb{V}^k = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{V}_j$, gdzie $\mathbb{V}_j = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{j-1})$ dla $k \in \mathbb{N}$,

(3) $\tau_k \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jest rzutem takim, że $\operatorname{im} \tau_k = \mathbb{V}^k$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Z definicji Γ oraz własności podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a–Beltramiego wynika, że jest to SO(n)-niezmienniczy schemat aproksymacyjny na $\mathbb{V}$. Ponadto $\ker L = \mathbb{V}^0$ oraz dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi $\tau_k \circ L = L \circ \tau_k$.

Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$ oraz zdefiniujmy SO(n)-indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(n))$ równością

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \\ = \ &\nabla_{\mathrm{SO}(n)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_N(0, \mu_{m_0} + \epsilon), B(\mathbb{V})\right) - \nabla_{\mathrm{SO}(n)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_N(0, \mu_{m_0} - \epsilon), B(\mathbb{V})\right), \end{aligned}$$

przy czym liczba $\epsilon > 0$ jest odpowiednio mała. Z faktu 4.1.3 wynika, że powyższa definicja jest poprawna. Postępując analogicznie, możemy zdefiniować SO(2)-indeks bifurkacji $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \in U(\mathrm{SO}(2))$ dla $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$ wzorem

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \\ = \ &\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_N(0, \mu_{m_0} + \epsilon), B(\mathbb{V})\right) - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg\left(\nabla^2\Phi_N(0, \mu_{m_0} - \epsilon), B(\mathbb{V})\right) \end{aligned}$$

o współrzędnych

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \left(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathrm{SO}(n)}, \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_1}, \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_2}, \ldots\right).$$

Zauważmy, że naturalne włożenie grup $i\colon \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(n)$ indukuje homomorfizm pierścieni $i^*\colon U(\mathrm{SO}(n)) \to U(\mathrm{SO}(2))$ taki, że $i^*(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0})) = \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})$ dla $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$. Połóżmy $\mathbb{V}(m_0) = \bigoplus_{i=0}^{m_0} V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_i)$.

Dowody poniższych lematów są analogiczne do dowodów lematów 3.1.4, 3.1.5 i 3.1.6, dlatego je pomijamy.

Lemat 4.2.4. *Załóżmy, że $n_- > 0$ oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$. Wówczas*

$$\begin{aligned}\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) &= \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(m_0-1)))\Big)^{n_-} \\ &\star \Big((\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}))))^{n_-} - \mathbb{I}\Big).\end{aligned}$$

Ponadto

(a) jeżeli n_- jest liczbą parzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_-} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(b) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ *oraz* $n_- \cdot \dim \mathbb{V}(m_0-1)$ *są liczbami parzystymi, to*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_-} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(c) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ *jest liczbą parzystą oraz* $n_- \cdot \dim \mathbb{V}(m_0-1)$ *jest liczbą nieparzystą, to*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \mathbb{I} - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_-} \in U_+(\mathrm{SO}(2)).$$

Lemat 4.2.5. *Załóżmy, że $n_+ > 0$ i ustalmy $\mu_{m_0} \in \sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$. Wówczas*

$$\begin{aligned}\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{m_0}) &= \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(\mathbb{V}(m_0)))\Big)^{-n_+} \\ &\star \Big((\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}))))^{n_+} - \mathbb{I}\Big).\end{aligned}$$

Ponadto

(a) jeżeli n_+ jest liczbą parzystą, to

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0}))))^{n_+} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(b) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ *oraz* $n_+ \cdot \dim \mathbb{V}(m_0)$ *są liczbami parzystymi, to*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_+} - \mathbb{I} \in U_-(\mathrm{SO}(2)),$$

(c) jeżeli $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ *jest liczbą parzystą oraz* $n_+ \cdot \dim \mathbb{V}(m_0)$ *jest liczbą nieparzystą, to*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) = \mathbb{I} - \nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\mathrm{Id}, B(V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})))^{n_+} \in U_+(\mathrm{SO}(2)).$$

W poniższym lemacie podajemy indeks bifurkacji w punkcie $0 \in P(\Phi_N)$.

Lemat 4.2.6. *Indeks bifurkacji w punkcie $0 \in P(\Phi_N)$ dany jest równością:*

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0) = \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\operatorname{Id}, B(\mathcal{H}_0^n))\Big)^{n_-} - \Big(\nabla_{\mathrm{SO}(2)}\text{-}\deg(-\operatorname{Id}, B(\mathcal{H}_0^n))\Big)^{-n_+}.$$

Z powyższego lematu wynika równość:

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0)_H = \begin{cases} (-1)^{n_-} - (-1)^{n_+}, & \text{gdy } H = \mathrm{SO}(2), \\ 0, & \text{gdy } H \neq \mathrm{SO}(2). \end{cases}$$

Zatem $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0) \neq \Theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy n_-, n_+ są różnej parzystości.

Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathbb{R}$ i oznaczmy przez $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ składową spójności zbioru

$$\operatorname{cl}\{(u,\mu) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} \colon \nabla_u \Phi_N D(u,\mu) = 0, u \neq 0\},$$

zawierającą $(0, \mu_{m_0})$. Stosując niezmienniczą alternatywę Rabinowitza do układu (4.2), otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2.7. *Ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$. Jeżeli jeden z poniższych warunków jest spełniony*

(i) $\mu_{m_0} > 0$ i $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją lub $n_- \cdot \dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest liczbą nieparzystą,

(ii) $\mu_{m_0} < 0$ i $V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją lub $n_+ \cdot \dim V_{-\Delta_{S^n}}(-\mu_{m_0})$ jest liczbą nieparzystą,

(iii) $\mu_{m_0} = 0$ i $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest nietrywialną $\mathrm{SO}(n)$-reprezentacją lub $\dim V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ jest liczbą nieparzystą oraz n_-, n_+ są różnej parzystości,

to $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem nieograniczonym albo

(1) $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem ograniczonym,

(2) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(3) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$.

Szkic dowodu powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy [23]. Zauważmy, że dla ustalonego $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi)$, założenia powyższego twierdzenia implikują, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$, vide [19].

4.2.2 Zbiory rozwiązań oraz łamanie symetrii

W tym podrozdziale zbadamy zbiory słabych rozwiązań zagadnienia (4.2). Podobnie jak w poprzednim podrozdziale, rozważymy najpierw przypadek kuli geodezyjnej o promieniu $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Okazuje się, że przy tym założeniu, z każdego punktu $(0, \mu_m) \in \{0\} \times (\mathcal{P}(\Phi_N) \setminus \{0\})$ bifurkuje spójny zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (4.2), który jest nieograniczony. Ponadto jeżeli n_- i n_+ są różnej parzystości, to z punktu $(0,0)$ również bifurkuje nieograniczony zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (4.2). Co więcej, jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to w punktach $(0, \mu_m) \in \{0\} \times \mathcal{P}(\Phi_N)$ zachodzi zjawisko łamania symetrii.

Oznaczmy $d(m) = \dim \mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)^{\mathrm{SO}(2)}$ oraz $k_0(m) = d(0) + \ldots + d(m)$ dla $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. W poniższym twierdzeniu dowodzimy nieograniczoności zbioru słabych rozwiązań zagadnienia (4.2) rozważanego na kuli $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Twierdzenie 4.2.8. *Załóżmy, że* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *oraz ustalmy* $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N) \setminus \{\mu_0\}$. *Wówczas zbiór słabych rozwiązań zagadnienia* (4.2), $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$, *jest nieograniczony.*

Dowód. Z wniosku 1.5.15 wynika, że założenia twierdzenia 4.2.7 są spełnione, zatem $C(\mu_{m_0}) \neq \{(0, \mu_{m_0})\}$. Przypuśćmy, że zbiór $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ jest ograniczony. Wówczas, na mocy twierdzenia 4.2.7,

(1) $C(\mu_{m_0}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\} \times \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_s}\}$,

(2) $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(n))$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & i^*\Big(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}(\mu_{i_s})\Big) = i^*\Big(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})\Big) + \ldots + i^*\Big(\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})\Big) \\ = \; & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1}) + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s}) = \Theta \in U(\mathrm{SO}(2)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $|\mu_{i_1}| \leqslant \ldots \leqslant |\mu_{i_s}|$ oraz $\mu_{i_s} > 0$.

1. Załóżmy, że liczby n_-, n_+ są parzyste. Z lematów 4.2.4 i 4.2.5 wynika, że dla dowolnego $j = 1, \ldots, s$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j}) \in U_-(\mathrm{SO}(2))$. Co więcej, ponieważ $\mathcal{H}^n_{m_0} \subset \mathbb{V}_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{m_0})$ oraz $m_0 \neq 0$, $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0}) \neq \Theta \in U(\mathrm{SO}(2))$, zatem istnieje $l_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_{l_0}} \neq 0$. Stąd
$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{l_0}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{l_0}} \leqslant \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{m_0})_{\mathbb{Z}_{l_0}} < 0,$$
co przeczy (4.10).

2. Załóżmy, że liczby n_-, n_+ są nieparzyste. Postępując tak jak w dowodzie twierdzenia 3.2.2, można uzasadnić, że
$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s}, \tag{4.11}$$
$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = n_+(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s} \tag{4.12}$$
oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ i $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$. Co więcej, dla $1 \leqslant j \leqslant s-1$ zachodzi $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$. Postępując tak jak w dowodzie twierdzenia 4.1.7 można uzasadnić, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Ponadto korzystając ze wzorów (4.11) i (4.12), otrzymujemy
$$\begin{aligned} & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ = \; & \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ = \; & n_-(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s} + n_+(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s} = (-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s}\,(n_- + n_+) \neq 0, \end{aligned}$$
co przeczy (4.10).

3. Załóżmy, że n_- jest liczbą nieparzystą oraz n_+ jest liczbą parzystą. Postępując tak jak w dowodzie twierdzenia 3.2.3, można uzasadnić, że
$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = n_-(-1)^{k_0(i_s)+1}p^n_{i_s}, \quad \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = -n_+p^n_{i_s}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ i $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$. Co więcej, dla $1 \leqslant j \leqslant s-1$ zachodzi $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$. Argumentując tak jak wcześniej, pokazujemy, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$. Ponadto

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ =\ &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ =\ &n_-(-1)^{k_0(i_s)+1} p^n_{i_s} - n_+ p^n_{i_s} = p^n_{i_s}\left((-1)^{k_0(i_s)+1} n_- - n_+\right), \end{aligned}$$

stąd $(-1)^{k_0(i_s)+1} n_- - n_+ = 0$, czyli $n_- = n_+$ albo $n_- = -n_+$, to zaś przeczy założeniu.

4. Załóżmy, że n_- jest liczbą parzystą oraz n_+ jest liczbą nieparzystą. Postępując tak jak wcześniej, można pokazać, że

$$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = -n_- p^n_{i_s}, \quad \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \ = \ -n_+(-1)^{k_0(i_s)} p^n_{i_s}$$

oraz $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ i $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_j} = 0$ dla $j > i_s$. Co więcej, dla $1 \leqslant j \leqslant s-1$ zachodzi $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_j})_{\mathbb{Z}_{i_s}} = 0$. Argumentując tak jak wcześniej, pokazujemy, że $C(\mu_{m_0})$ przecina $\{0\} \times \mathbb{R}$ w punktach $(0, -\mu_{i_s})$ i $(0, \mu_{i_s})$.

$$\begin{aligned} &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{j_1})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \ldots + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ =\ &\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} + \mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(-\mu_{i_s})_{\mathbb{Z}_{i_s}} \\ =\ &-n_- p^n_{i_s} - n_+(-1)^{k_0(i_s)} p^n_{i_s} = p^n_{i_s}\left(-n_- + (-1)^{k_0(i_s)+1} n_+\right). \end{aligned}$$

Stąd $-n_- + (-1)^{k_0(i_s)+1} n_+ = 0$, czyli $n_- = -n_+$ albo $n_- = n_+$. Otrzymana sprzeczność z założeniem kończy dowód.

□

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 4.1.7, w powyższym dowodzie korzystaliśmy ze struktury przestrzeni własnych $V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{i_s})$, w szczególności z własności $\mathcal{H}^n_{i_s} \subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{i_s})$ oraz $\mathcal{H}^n_{i_s} \not\subset V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_{\tilde{m}})$ dla każdych $0 < \tilde{m} < i_s$, vide wniosek 1.5.18. Ponieważ nie jest to prawdą dla dowolnego $\alpha \in (0, \pi)$, metoda z powyższego dowodu nie może być zastosowana w ogólnym przypadku.

Zauważmy, że jeżeli $\mu_{m_0} = 0$ oraz liczby n_-, n_+ są tej samej parzystości, to z twierdzenia 4.2.6 wynika, że $\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}(0) = \Theta$, zatem do badania problemu ograniczoności zbioru rozwiązań $C(0) \subset \{0\} \times \mathbb{R}$ nie można użyć metod z tego rozdziału. Jeżeli natomiast liczby n_-, n_+ są różnej parzystości, to z punktu $(0,0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ bifurkuje zbiór słabych rozwiązań zagadnienia (4.2), zgodnie z twierdzeniem 4.2.7. Zauważmy, że z twierdzenia 4.2.8 wynika, że jest on nieograniczony.

W poniższym twierdzeniu charakteryzujemy punkty bifurkacji słabych rozwiązań układu (4.2), w których zachodzi zjawisko łamania symetrii.

Twierdzenie 4.2.9. *Załóżmy, że $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oraz ustalmy $\mu_{m_0} \in \mathcal{P}(\Phi_N)$. Jeżeli $m_0 \in \mathbb{Z}$ jest liczbą nieparzystą, to punkt $(0, \mu_{m_0})$ jest punktem globalnej bifurkacji słabych rozwiązań problemu (4.2), w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii.*

Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 4.1.9, przy czym stosuje się wniosek 1.5.18 zamiast wniosku 1.5.15.

Rozważmy teraz zagadnienie (4.2) na dowolnej kuli geodezyjnej $B(\alpha) \subset S^n$, gdzie $\alpha \in (0, \pi)$. Podobnie jak w układzie (4.1), stosując metody z dowodu twierdzenia (4.2.8), uzyskujemy wyniki mniej ogólne wyniki niż w przypadku $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dowód poniższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 4.1.10, dlatego go pomijamy.

Twierdzenie 4.2.10. *Ustalmy $l \in \mathbb{N}$ oraz $\mu_{m_0} \in B_l$.*

1. *Jeżeli $n_- > 0$ jest liczbą parzystą oraz zbiór $C(\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ słabych rozwiązań zagadnienia (4.2) jest ograniczony, to $n_+ > 0$ jest liczbą nieparzystą oraz*

$$C(\mu_{m_0}) \cap \{(0, \mu) \in \mathbb{V} \times (-\infty, 0) \colon -\mu \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha)\} \neq \emptyset.$$

2. *Jeżeli $n_+ > 0$ jest liczbą parzystą oraz zbiór $C(-\mu_{m_0}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ słabych rozwiązań zagadnienia (4.2) jest ograniczony, to $n_- > 0$ jest liczbą nieparzystą oraz*

$$C(-\mu_{m_0}) \cap \{(0, \mu) \in \mathbb{V} \times (0, \infty) \colon \mu \in \sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))\} \neq \emptyset.$$

Bibliografia

[1] J. F. Adams, *Lectures on Lie groups*, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1969.

[2] Z. Balanov, W. Krawcewicz, H. Ruan, *Applied equivariant degree. I. An axiomatic approach to primary degree.* Discrete Contin. Dyn. Syst. **15(3)** (2006), 983–1016.

[3] Z. Balanov, W. Krawcewicz, H. Ruan, *Periodic solutions to* $\mathrm{O}(2)\times S^1$*-symmetric variational problems: Equivariant gradient degree approach. Nonlinear analysis and optimization II. Optimization*, 4584, Contemp. Math., 514, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[4] Z. Balanov, W. Krawcewicz and H. Steinlein, *Applied Equivariant Degree*, AIMS Series on Differential Equations and Dynamical Systems, American Institute of Mathematical Sciences, 2006.

[5] S.-J. Bang, *Eigenvalues of the Laplacian on a geodesic ball in the n-sphere*, Chin. J. of Math. **15(4)**, (1987), 237–245.

[6] S.-J. Bang, *Notes on my paper Ęigenvalues of the Laplacian on a geodesic ball in the n-sphere"*, Chin. J. of Math. **18(1)**, (1990), 65–72.

[7] R. Berndt, *Representation of Linear Groups*, Vieweg, Wiesbaden, 2007.

[8] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representation of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.

[9] G. Cerami, *Symmetry breaking for a class of semilinear elliptic problems*, Nonl. Anal. **10** (1986), 1–14.

[10] K-S Cheng, J. A. Smoller, *Symmetry-Breaking for Systems of Nonlinear Elliptic Equations* J. of Diff. Eq. **80** (1989), 315–342.

[11] Ch. Cosner, *Bifurcation from higher eigenvalues in nonlinear elliptic equations: continua that meet infinity.* Nonl. Anal. **12** (1988), 271–277.

[12] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Nonlinear Sturm–Liouville eigenvalue problems and topological degree.* J. Math. Mech. **19** (1970) 1083–1102.

[13] E. N. Dancer, *On non-radialy symmetric bifurcation*, J. Math. Soc. **20(2)** (1979), 287–292.

[14] E. N. Dancer, *Breaking of Symmetries for Forced Equations*, Math. Ann. **262** (1983), 473–486.

[15] T. tom Dieck, *Transformation Groups and Representation Theory*, in: Lect. Not. in Math. **766** (1979).

[16] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.

[17] J. J. Duistermaat, J. A. C Kolk, *Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[18] L. C. Evans, *Równania Różniczkowe Cząstkowe*, Wyd. Nauk. PWN, 2002.

[19] G. L. Garza, S. Rybicki, *Equivariant bifurcations index*, Nonl. Anal. **73(7)** (2010), 2779–2791.

[20] K. Gęba, *Degree for Gradient Equivariant Maps and equivariant Conley Index*, Birhäuser, Topological Nonlinear Analysis, Degree, Singularity and Variations, Eds. M Matzeu i A. Vignoli, Progr. Nonl. Diff. Equat. Appl. **27** (1997), 247–272.

[21] K. Gęba, S. Rybicki, *Some remarks on the Euler ring $U(G)$*, J. Fixed Point Theory Appl. **3** (2008), 143–158.

[22] A. Gołębiewska, S. Rybicki, *Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps*, Disc. and Cont. Dyn. Syst. Ser. S **6(4)** (2013), 985–997.

[23] A. Gołębiewska, S. Rybicki, *Global bifurcations of critical orbits of G-invariant strongly indefinite functionals*, Nonl. Anal. **74** (2011), 1823–1834.

[24] L. Górniewicz, R. S. Ingarden, *Analiza matematyczna dla fizyków, tom 1*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 2004.

[25] L. Górniewicz, R. S. Ingarden, *Analiza matematyczna dla fizyków, tom 2*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 2000.

[26] D. Gurarie, *Symmetries and Laplacians, Introduction to Harmonic Analysis, Group Representations and Applications*, North-Holland Mathematics Studies 174, North-Holland, Amsterdam (1992).

[27] T. Healey, H. Kielhöfer, *Separation of global solution branches of elliptic systems with symmetry via nodal properties*, Nonl. Anal. **21** (1993), 665–684.

[28] T. Healey, H. Kielhöfer, *Preservation of nodal structure on global bifurcating solution branches of elliptic equations with symmetry*, J. Diff. Eq. **106** (1993), 70–89.

[29] T. Healey, H. Kielhöfer, *Symmetry and nodal properties in the global bifurcation analysis of quasi-linear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **113** (1990), 299–311.

[30] E. Hebey, *Sobolev spaces on Riemannian Manifolds*, Lect. Not. in Math., Springer, Berlin Heidelberg, 1996.

[31] D. Husemöller, *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[32] M. Izydorek, *A cohomological index in Hilbert spaces and applications to strongly indefinite problems*, J. of Diff. Eq., **170** (2001), 22–50.

[33] M. Izydorek, *Equivariant Conley index in Hilbert spaces and applications to strongly indefinite problems.* Nonl. Anal., no. 1, Ser. A: Theory Methods, **51** (2002), 33–66.

[34] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Group*, Oxford University Press, 1991.

[35] J. Kluczenko, *Bifurcation and symmetry breaking of solutions of systems of elliptic differential equations*, Nonl. Anal. **75** (2012), 4278–4295.

[36] W. Krawcewicz, J. Yu, H. Xiao, *Multiplicity of periodic solutions to symmetric delay differential equations*, J. Fixed Point Theory Appl. **13(1)** (2013), 103–141.

[37] J. López-Gómez, *Spectral Theory and Nonlinear Analysis*, Chapman and Hall, Boca Raton, UK, 2001.

[38] K. H. Mayer, *G-invariante Morse-functionen*, Man. Math. 63 (1989), 99–114.

[39] C. W. Michlin, *Liniowe równania fizyki matematycznej (w języku rosyjskim)*, Nauka, Moskwa, 1964.

[40] D. Mitrovič and D. Žubrinič, *Fundamentals of applied functional analysis*, Addison Wesley Longman inc., 1998.

[41] Y. Miyamoto, *Global branches of sign-changing solutions to a semilinear Dirichlet problem in a disk*, Adv. Diff. Eq. **16** (2011), 747–773.

[42] Y. Miyamoto, *Global branch from the second eigenvalue for a semilinear Neumann problem in a ball*, J. Diff. Eq. **249** (2010), 1853–1870.

[43] L. Nirenberg, *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences (1974).

[44] P. Rabier, *Symmetries, Topological degree and a Theorem of Z.Q. Wang*, Rocky Mountain J. Math. **24(3)** (1994), 1087–1115.

[45] P. H. Rabinowitz, *Nonlinear Sturm–Liouville problems for second order ordinary differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 939–961.

[46] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis **7** (1971), 487–513.

[47] M. Ramaswamy, P. N. Srikanth, *Symmetry breaking for a class of semilinear elliptic problems*, Trans. of AMS **304(2)** (1987), 839–845.

[48] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002.

[49] K. Rybakowski, *On the homotopy index for infinite-dimensional semiflows*, Trans. Am. Math. Soc. **269**, 351–381 (1982).

[50] S. Rybicki, *A degree for S^1-equivariant orthogonal maps and its applications to bifurcation theory*, Nonl. Anal. TMA, **23** (1994), 83–102.

[51] S. Rybicki, *Degree for equivariant gradient maps*, Milan J. Math. **73** (2005), 103–144.

[52] S. Rybicki, *On Rabinowitz alternative for the Laplace–Beltrami operator on S^{n-1}: continua that meet infinity.* Diff. and Int. Eq. **9(6)** (1996), 1267–1277.

[53] S. Rybicki, P. Stefaniak, *Unbounded sets of solutions of non-cooperative elliptic systems on spheres* - wysłana do publikacji, 2014.

[54] S. Rybicki, P. Stefaniak, *Sets of solutions of non-cooperative elliptic systems on geodesic balls* - w przygotowaniu.

[55] N. Shimakura, *Partial differential operators of elliptic type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 99, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1992.

[56] J. Smoller, A. G. Wasserman, *Symmetry-Breaking for Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*, Arch. Rational Mech, Anal. **95** (1986), 217–225.

[57] J. Smoller, A. G. Wasserman, *Symmetry-Breaking for Solutions of Semilinear Elliptic Equations with General Boundary Conditions*, Commun. Math. Phys. **105** (1986), 415–441.

[58] J. Smoller, A. G. Wasserman, *Symmetry, Degeneracy, and Universality in Semilinear Elliptic Equations. Infinitesimal Symmetry-Breaking*, J. of Func. Anal. **89** (1990), 364–409.

[59] J. Smoller, A. G. Wasserman, *Bifurcation and symmetry-breaking*, Invent. Math. **100** (1990), 63–95.

[60] P. N. Srikanth, *Symmetry breaking for a class of semilinear elliptic problems.* Ann. Inst. H. Poincaȑe **7** (1990), 107–112.

[61] P. Stefaniak, *Symmetry breaking of solutions of non-cooperative elliptic systems*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), 681–693.

[62] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations, Basic Theory*, Texts in applied mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1999.

[63] N. Ja. Vilenkin *Special Functions and the Theory of Group Representation*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 22, American Mathemathical Society, 1988.

[64] Z. Q. Wang, *Symmetries and calculation of the degree*, Chinese Ann. Math. **10**(1989), 520–536.

[65] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Uniwersity Press, London and New York, 1944.

Indeks

A_l, 32
$B(\alpha)$, 11
$B(x, \alpha)$, kula geodezyjna, 11
$B_\gamma(\mathbb{V}, u_0)$, kula otwarta w $\mathbb{V}$, 11
$C^k(\Omega)$, 10
$C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, 10
$C^k_G(\mathbb{V})$, 16
$C^k_G(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, 16
$C^\infty(\Omega)$, przestrzeń funkcji gładkich, 10
$D_\gamma(\mathbb{V}, u_0)$, kula domknięta w $\mathbb{V}$, 11
G-CW kompleks, 19
G-homotopijna równoważność, 18
G-homotopia, 18
G-niezmienniczy schemat aproksymacyjny, 26
G-przestrzeń, 14
G-rozmaitość, 14
H^n_m, 31
$N(H)$, normalizator, 13
$S^{\mathbb{V}}$, 21
$S_\gamma(\mathbb{V}, u_0)$, sfera w $\mathbb{V}$, 11
$U(G)$, Pierścień Eulera, 19
$U(\mathrm{SO}(2))$, 21
$U_\pm(\mathrm{SO}(2))$, 21
$V_{-\Delta_{S^{n-1}}}(\mu)$, 30
$V_{-\Delta_{S^n}}(\mu_m)$, 32, 33
$V_{-\Delta}(\mu)$, 28
$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(2)}$, indeks bifurkacji, 60
$\mathcal{BIF}_{\mathrm{SO}(n)}$, indeks bifurkacji, 76, 85
Δ, operator Laplace'a, 10
$\Delta_{S^{n-1}}$, operator Laplace'a–Beltramiego, 12
$\mathrm{Gl}(\mathbb{V})$, grupa izomorfizmów przestrzeni $\mathbb{V}$, 13
$\mathrm{Gl}(n)$, grupa macierzy odwracalnych, 13
$\mathrm{O}(n)$, grupa macierzy ortogonalnych, 13
$\mathrm{SO}(n)$, specjalna grupa macierzy ortogonalnych, 13
$\mathbb{R}[k, m]$, 16
$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, suma prosta reprezentacji, 15
$\mathbb{V}_{(H)}$, 22
$\mathcal{H}^n_m$, 31
$\chi_G(X)$, G-charakterystyka Eulera, 19
$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0)$, pochodna normalna, 11
$\operatorname{im} L$, obraz operatora, 12
$\ker L$, jądro operatora, 12
$\nabla \Phi$, gradient, 11
$\sigma(-\Delta; \Omega)$, spektrum operatora Laplace'a, 28
$\sigma(-\Delta_{S^{n-1}})$, spektrum operatora Laplace'a–Beltramiego, 30
$\sigma_D(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$, spektrum operatora Laplace'a-Beltramiego na kuli geodezyjnej, 32
$\sigma_N(-\Delta_{S^n}; B(\alpha))$, spektrum operatora Laplace'a-Beltramiego na kuli geodezyjnej, 33
$\overline{\mathrm{sub}}(G)$, zbiór domkniętych podgrup grupy G, 13
$\overline{\mathrm{sub}}(\Omega)$, 22
$\overline{\mathrm{sub}}[G]$, zbiór klas sprzężoności domkniętych podgrup grupy G, 13
$\overline{\mathrm{sub}}[\Omega]$, 22
$m^-(\cdot)$, indeks Morse'a, 22

doklejanie komórek, 19

funkcja Ω-dopuszczalna, 22

grupa izotropii, 14
grupa Liego, 13

niezmiennicza funkcja Morse'a, 22
  specjalna, 22

odwzorowanie G-niezmiennicze, 14
odwzorowanie G-współzmiennicze, 14
operator pełnociągły, 12
operator zwarty, 12
orbita, 14

pod-G-CW-kompleks, 19

punkt bifurkacji, 12
  globalnej, 12
  lokalnej, 12
punkt globalnej bifurkacji, w którym zachodzi zjawisko łamania symetrii, 18
punkt rozgałęzienia, 12

reprezentacja grupy Liego, 14
  ortogonalna, 14
  trywialna, 14

stopień silnie nieokreślonych funkcjonałów niezmienniczych, 26
stopień współzmienniczych odwzorowań gradientowych, 23

torus, 15
  maksymalny, 15

wzór Greena, 12

zbiór G-niezmienniczy, 14
zbiór punktów stałych działania grupy, 14